

# DETERMINACIÓN DE LA FRACCIÓN DE FRANJA EN CALIBRACIÓN DE BLOQUES PATRÓN MEDIANTE REGULARIZACIÓN ROBUSTA

carlos galván<sup>1</sup> y mariano rivera<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Nacional de Metrología

Apdo. Postal 1-100 CP 7600 Querétaro, México; cgalvan@cenam.mx

<sup>2</sup>Centro de Investigación en Matemáticas

Apdo postal 402, Guanajuato, Gto., Mexico 36000; mrivera@cimat.mx

**Resumen:** La materialización de la unidad de longitud del SI (el metro), esta basada en mediciones interferométricas de bloques patrón. La incertidumbre de calibración de los bloques patrón tiene inmiscuidos varios factores importantes; uno de ellos es la determinación de la fracción de franja de los interferogramas que genera el experimento de calibración de los bloques patrón. En este trabajo se presenta un nuevo modelo para la determinación de la fracción franja, basado en la técnica de regularización en el procesamiento de imágenes. Este modelo permite la determinación no solo de la fase del interferograma, sino también de los elementos de iluminación incluidos en la ecuación de interferencia de dos haces de luz coherentes.

## INTRODUCCION

La unidad de longitud del sistema internacional (SI), el metro, es una de las unidades más importantes para la ciencia y la tecnología. La materialización de la unidad está basada en mediciones interferométricas de bloques patrón, siendo estos los estándares materiales más usados para mantener la trazabilidad en metrología dimensional. Estos se emplean en las comparaciones internacionales de mediciones interferométricas para asegurar la exactitud de la unidad, que es reproducida en los diferentes países.

El CENAM cuenta con un interferómetro de bloques patrón TESA, que es un interferómetro Michelson con una configuración Twyman-Green. Los bloques a medir son pegados sobre una platina circular con excelente calidad en planicidad, esta platina es usada como espejo de superficie a medir, así como la calidad de las caras de medición de los bloques patrón. Además el espejo de referencia en el arreglo Twyman-Green es inclinado para obtener franjas a lo largo de la imagen de la platina con el bloque.

El desplazamiento fraccional de las franjas sobre el bloque patrón con relación a las franjas localizadas en la platina es conocido con el nombre de fracción de franja. Empleando dos láseres, con distintas longitudes de onda y haciendo uso del algoritmo de exceso de franjas se puede estimar el valor de desviación del bloque respecto a la longitud nominal que el usuario debe proporcionar al sistema.

El interferómetro en su conjunto, tiene sensores para realizar mediciones de las condiciones ambientales (para la corrección del índice de refracción del aire), así como de las temperaturas de la platina para hacer ajustes con respecto a la temperatura de referencia (20°C).

Un punto importante en este sistema es la determinación de la fracción de franja que tiene el centro del bloque con respecto a la platina de referencia. El algoritmo original incluye, en su análisis, solo la ubicación de los valles de la función cosenoidal, para la determinación del corrimiento, lo cual no permite una determinación de la forma del bloque bajo medición.

El presente trabajo presenta un modelo que permite el análisis de las imágenes de interferencia de manera completa, además es factible recuperar los elementos de iluminación incluidos en la ecuación de interferencia de dos haces de luz coherentes[1].

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera. La segunda sección contiene una descripción de la técnica de regularización en procesamiento de imágenes. La siguiente sección contiene la aplicación de la técnica de regularización en imágenes de patrones de franjas con trabajos ya publicados. La cuarta sección contiene el modelo propuesto para la solución del problema de bloques patrón, así como los resultados obtenidos al aplicar este modelo a interferogramas obtenidos con el interferómetro TESA.

## REGULARIZACIÓN EN IMÁGENES

En el campo del procesamiento de imágenes generalmente se encuentra el problema de reconstruir un campo  $\hat{f}$  a partir de datos observados con ruido  $g$ , este problema es generalmente, mal planteado. Por ejemplo, considerando el siguiente modelo

$$g = F(\hat{f}) + h$$

donde  $h$  es ruido aditivo y  $F$  es, en general, un operador no lineal que se asume conocido.

La información que se tiene del campo solo es  $g$ , así como el operador que es aplicado sobre los datos,

esta información no es suficiente para obtener una estimación adecuada del campo  $f$ , por ello se debe incluir el concepto de regularización para acotar el intervalo de soluciones. Esto significa, que es necesaria cierta información a priori del sistema es decir, se deben hacer consideraciones acerca de la estructura del modelo  $f$ , para que se introduzca en el proceso de recuperación. La solución regularizada de  $f$  es calculada mediante la minimización de la funcional de energía  $U[2]$ :

$$\hat{f} = \arg \min_f U(f) \quad (1)$$

donde

$$U(f) = D(f) + IR(f) \quad (2)$$

El término de datos  $D$ , establece que la reconstrucción  $f$ , debe ser consistente con los datos observados  $g$ . El término de regularización  $R$  impone una penalización en el caso de que se viole el conocimiento a priori que se establece, mientras que la contribución relativa de cada término a la energía global esta pesada por el parámetro  $I$  conocido como parámetro de regularización. En el marco de la estimación bayesiana, el término de datos es escogido como el negativo de la log-verosimilitud. Así por ejemplo, si se asume que el elemento de ruido es un modelo Gaussiano, este término puede ser expresado como:

$$D(f) = \sum_{e \in L} (F(f_r) - g_r)^2$$

En la ecuación anterior  $r=(x, y)$  representa una posición en la lattice de píxeles  $L$ . Las restricciones impuestas por el conocimiento a priori son, bajo este marco, incorporadas en la forma de un modelo de campo aleatorio markoviano (CAM) para  $f$ , de tal forma que el elemento de regularización toma la forma de la suma sobre todas las pandillas de un sistema de vecindad dado, de un conjunto de funciones de potencial soportadas por esas pandillas. Por ejemplo se puede tomar una vecindad de un píxel con sus cuatro vecinos más cercanos

$$N_r = \{(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$$

y una pandilla de tamaño 2  $\langle r, s \rangle$  que corresponde a pares de píxeles horizontales y verticales, del tal forma que  $R(f)$  tome la forma siguiente:

$$R(f) = \sum_{\langle r, s \rangle \in L} r(f_r - f_s) \quad (3)$$

Lo anterior expresa el modelo de resortes si se considera a la función  $r$  como un potencial

cuadrático sobre las primeras diferencias entre los miembros de las pandillas

$$r(f_r - f_s) = (f_r - f_s)^2$$

En este caso, el término de regularización es cuadrático y homogéneo. Este potencial cuadrático corresponde a la consideración a priori de que los datos originales  $\hat{f}$  son globalmente suaves.

## REGULARIZACIÓN EN ANÁLISIS DE FRANJAS

El modelo de franjas en procesamiento de imágenes esta dado por la ecuación de interferencia de dos haces de luz coherentes a los cuales se les incluye una inclinación del elemento de referencia con el fin de obtener una frecuencia portadora, este esquema puede ser expresado como:

$$h(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\mathbf{v}_0 x + \mathbf{f}(x, y)) \quad (4)$$

donde la incógnita para el modelo es el elemento de fase  $f$ , que se encuentra en el término cosenoidal de la ecuación. Los elementos restantes de la ecuación son elementos debido a la iluminación y propiedades de reflectancia tanto de la platina como del mismo bloque para el caso de la medición de bloques patrón. El elemento de portadora esta dentro del coseno, expresado como  $\mathbf{v}_0 x$ .

Existen ya varios trabajos para el problema de fase con regularización como el filtro de cuadratura robusto, y el filtro de cuadratura adaptable, pero no consideran los elementos de iluminación es su contexto. Además plantean el modelo de suavidad global que no se cumple para el modelo de franjas en bloques patrón[3].

## ANÁLISIS DE FRANJAS CON REGULARIZACIÓN CON POTENCIALES CON CONDICIÓN DE REPOSO ADAPTABLE

Siguiendo el proceso de regularización planteado anteriormente, para la ecuación de interferencia (4), se puede plantear los elementos de función de energía, así el elemento de datos se puede expresar como

$$D(a, b, f) = \sum_{r \in L} (a_r + b_r \cos(\mathbf{v}_0 x + f_r) - g_r)^2 \quad (5)$$

Si se considera como restricción el concepto de suavidad global, el elemento de regularización para el modelo de resortes se puede expresar tal y como se planteó en el modelo original (ecuación 3). Pero este modelo no es aplicable al modelo de bloques patrón, pues para este caso se tienen saltos abruptos debido a la presencia de dos cuerpos en el análisis.

Para resolver el problema anterior se han presentado varios modelos, uno de ellos es la consideración de

"outliers" o píxeles que no cumplen con la consideración de suavidad global (muchos autores consideran los outliers como bordes en la imagen[4]) que es algo útil en nuestro modelo. Bajo esta consideración M. Rivera y J.L. Marroquín [5] proponen, en lugar de funciones de potencial con condición de reposo cero[4], potenciales con condición de reposo adaptable, y tiene la forma:

$$U_R = I \sum a^2(t) = I \sum (t - x)^2$$

La función  $\xi$  debe ser restringida a ser cercana a 0 en regiones uniformes y cercana al tamaño del salto en los bordes de  $f$ .

Para introducir estas restricciones,  $\xi$  se describen como el producto de un indicador de bordes y una longitud de equilibrio con signo, cuyo valor absoluto debe ser pequeño

$$a^2(t, \mathbf{f}) = (t - \mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(t))^2 + \frac{1}{m} \mathbf{f}_t^2$$

La función  $\phi$  toma valores cercanos a cero para valores donde se quiera penalización cuadrática de  $t$  (suavidad), en tanto que toma valores cercanos a  $t$  para valores donde se desee que sea robusta y detecte la presencia de "outliers" o bordes en la imagen.

Bajo este concepto, el modelo es ahora robusto a bordes en la imagen, esto es, saltos abruptos en la fase de la señal. Pero se tiene otro problema, y es la estimación de la frecuencia portadora, pues el estar por debajo o por encima de el valor real de esta frecuencia implica la introducción de una pendiente en la recuperación de la fase, esto se puede ver en la fórmula de interferencia (4).

Esta frecuencia portadora no es posible conocerla con exactitud, debido a que depende de la inclinación del espejo de referencia y los métodos numéricos que existen no la estiman con gran exactitud (se probó un método con la transformada de Fourier propuesto por Huntley, y se logra tener una exactitud hasta la segunda cifra decimal), por ello el modelo anterior de resortes no es una solución adecuada pues supone que el modelo es constante a pedazos y aun cuando el modelo de platina y bloque si lo es, un error en la estimación de la frecuencia portadora implica que se introduzca una pendiente en la fase.

Para resolver este problema se pensó en probar la vecindad de segundo orden que consiste de pandillas de tres píxeles vecinos. Por ejemplo, las triadas que conforman esta vecindad hablando de una señal de una sola dimensión, son:

$$r, r+1, r+2; \quad r-1, r, r+1; \quad r-2, r-1, r$$

El concepto de modelo de resortes cambia ahora por el de placa delgada que esta formada por tres píxeles consecutivos.

La energía del modelo de placa resulta de aproximar las segundas derivadas por los términos de segundas diferencias:

$$\Delta^2 f_r = \Delta^+ f_r - \Delta^- f_r$$

donde:

$$\Delta^+ f_r = f_q - f_r \quad \text{y} \quad \Delta^- f_r = f_r - f_s$$

En base a lo anterior se puede construir el modelo con condición de reposo adaptable para la placa, quedando la función de este modelo como

$$a^2(\Delta^2 f_r) = [\Delta^2 f - x]^2$$

Esta función debe tener propiedades similares a las requeridas por el modelo de resortes. Para este caso son:

1. Debe ser cercana a cero para valores pequeños de  $\Delta^2 f_r$
2. Para valores grandes de  $\Delta^2 f_r$  debe ser cercano al valor del salto
3. En el caso de que  $\Delta^+ f_r$  sea pequeño, en tanto que  $\Delta^- f_r$  sea grande, entonces la función debe ser cercana al valor grande, en el caso inverso de valores también debe parecerse al valor grande. La idea de parecerse al valor grande es para eliminar su efecto en la funcional de energía completa

Para cumplir con estas propiedades se propone usar una función de la siguiente forma

$$a^2(\Delta^2 f_r, \mathbf{f}) = (\Delta^2 f_r - \mathbf{f}_{q,x} \mathbf{j}(\Delta^+ f_r) + \mathbf{f}_{r,s} \mathbf{j}(\Delta^- f_r))^2 + \frac{1}{m} \mathbf{f}_{r,s}^2 \quad (6)$$

Ahora el modelo se denominará placa con condición de rigidez adaptable. Es importante notar, que este modelo de placa tiene la propiedad, donde se localicen los bordes, el modelo se comporta como función de resorte.

El modelo anterior solo necesita determinar la forma de la función  $\mathbf{j}$ , la cual puede ser tomada de manera simple, como una función que busque bordes en todas las zonas, lo cual implica que  $\mathbf{j}(t) = t$ , si se sustituye esta expresión en la ecuación (6) se puede llegar a una ecuación donde se incluye tanto el término de datos, como el de regularización el cual contiene los elementos de iluminación del modelo:

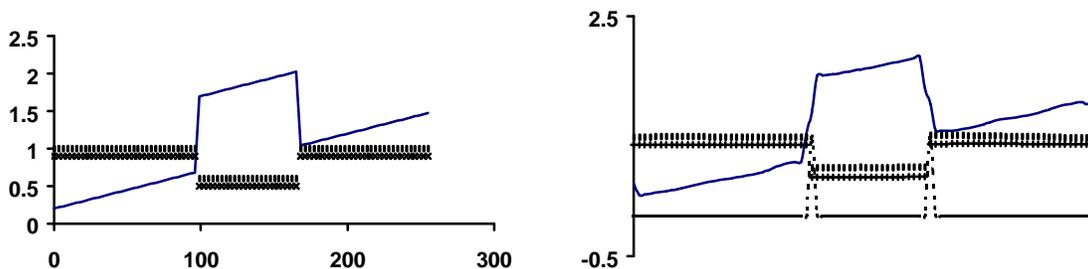


Figura 1. a) Datos sintéticos para valores de fase (línea continua), y de iluminación (valor de A en línea punteada y en puntos el valor de B. b) Datos recuperados con el modelo de placa con rigidez adaptable, se pueden observar los bordes encontrados por el modelo en la parte central de la imagen. Al modelo original se le agregó ruido blanco gaussiano con media 0 y desviación estándar 0.5.

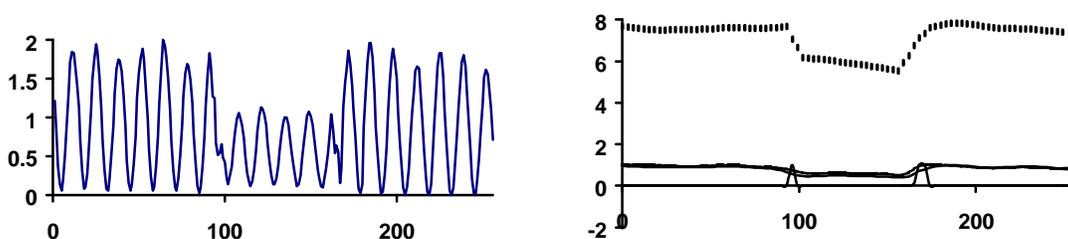


Figura 2. a) Datos reales observados con el interferómetro con el laser rojo. b) Datos recuperados con el modelo de placa con rigidez adaptable, se ve la fase (intervalo de 6-8), elementos de iluminación (intervalo ~1), y los bordes detectados, lo cuales coinciden con el cambio brusco en fase e iluminación.

$$\begin{aligned}
 U(a,b,f,f) = & \sum_{r \in L} (a_r + b_r \cos(\mathbf{v}_0 r + f_r) - g_r)^2 \\
 & + \mathbf{l} \sum_{\langle r,s \rangle \in L} (f_q - 2f_r - f_s - \mathbf{f}_{q,s} \mathbf{j}(f_q - f_r) + \mathbf{f}_{r,s} \mathbf{j}(f_r - f_s))^2 \\
 & + \mathbf{g} \sum_{\langle r,s \rangle \in L} (a_q - 2a_r - a_s - \mathbf{f}_{q,s} \mathbf{j}(a_q - a_r) + \mathbf{f}_{r,s} \mathbf{j}(a_r - a_s))^2 \\
 & + \mathbf{b} \sum_{\langle r,s \rangle \in L} (b_q - 2b_r - b_s - \mathbf{f}_{q,s} \mathbf{j}(b_q - b_r) + \mathbf{f}_{r,s} \mathbf{j}(b_r - b_s))^2 \\
 & + \frac{1}{m} \mathbf{f}_{r,s}^2
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} 1,2 + 0,005x & \text{si } x \geq 97 \text{ y } x \leq 165 \\ 0,2 + 0,005x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} 0,6 & \text{si } x \geq 97 \text{ y } x \leq 165 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{B}(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } x \geq 97 \text{ y } x \leq 165 \\ 0,9 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este modelo puede ser aplicado por el hecho de que cambios en los efectos de iluminación coinciden con cambios bruscos en fase, pues se refiere a cambio de cuerpo en el modelo.

## RESULTADOS

En esta sección se describirán los resultados obtenidos, tanto con imágenes sintéticas que reflejan el comportamiento del modelo original, como con datos obtenidos directamente del interferómetro TESA.

La figura 1a, muestra una señal de datos sintéticos para el valor de fase y de iluminación (A y B) de acuerdo a las siguientes expresiones:

Los límites para indicar el salto fueron seleccionados de acuerdo al algoritmo original. A los datos originales se les agregó ruido blanco para perturbar los datos originales y ver la resistencia del modelo ante estas circunstancias. El cambio en las condiciones de iluminación, se le puede atribuir a diferencia de material entre los elementos bajo análisis.

La figura 1b, contiene los resultados obtenidos con el modelo propuesto. Se puede observar que los resultados obtenidos son satisfactorios, pues detecta la pendiente en la fase, además encuentra en la posición correcta (con una desviación de  $\pm 1$  píxel) los bordes de la imagen. Los datos origen fueron tomados de la figura 1a.

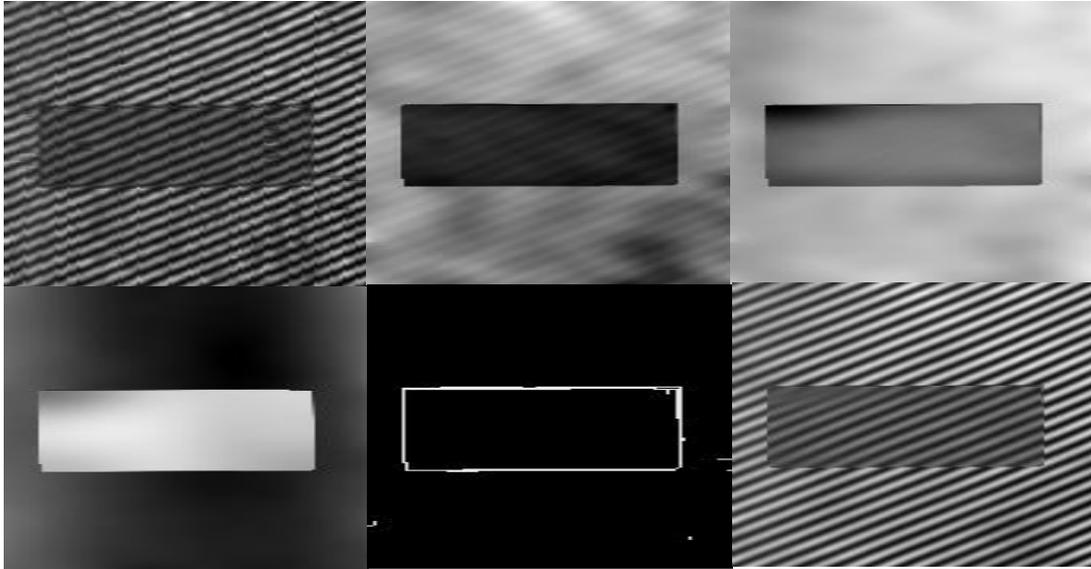


Figura 3. Resultados para un interferograma en dos dimensiones usando el modelo de placa con rigidez adaptable. a) Datos originales; b) Elemento A de iluminación; c) elemento B de iluminación; d) fase; e) Bordes en la imagen f) Recuperación de la señal completa

La figura 2a contiene datos reales que se obtuvieron del interferómetro TESA. Se colocó un bloque de distinto material al de la platina para que cambiaran las condiciones de reflectancia. Los resultados obtenidos para estos datos se observan en la figura 2b. Donde se observan los diferentes campos obtenidos, tanto de fase como de iluminación inclusive las detecciones de bordes.

En la figura 3, se observa resultados al aplicar el modelo a una señal en dos dimensiones, se pueden observar los datos originales en el interferograma, así como los diferentes campos calculados. Con la imagen de los bordes es factible calcular el centro del bloque de manera automática, sin la determinación por parte del usuario.

Un problema para el modelo, es el tiempo empleado para la obtención de los resultados, en un computadora pentium II a 300MHZ el tiempo necesario para la obtención del resultados en dos dimensiones es alrededor de 6h. Para una dimensión el tiempo es de 20s. Uno de los trabajos futuros es optimizar el procedimiento de localización del bloque para reducir el tiempo en el proceso de 2D.

## CONCLUSIONES

Se presenta un modelo de análisis de franjas con portadora que permite la recuperación del elemento de fase, así como de los elementos de iluminación de la ecuación de interferencia. El modelo es robusto a la detección de bordes en las imágenes, así como para la detección de zonas constantes a

pedazos y zonas con pendiente constante a pedazos, problema que se puede presentar en franjas con portadora donde se desconoce el elemento de frecuencia de dicha señal.

## REFERENCIAS

- [1] Galván C. "Análisis de franjas con regularización con potenciales con condición de reposo adaptable". Tesis de maestría en ciencias de la computación y matemáticas industriales, CIMAT, 2000
- [2] J.L. Marroquín, S. Mitter and T. Poggio, "Probabilistic Solution of Ill-Posed Problems in Computational Vision, " Journal of the American Statistical Association, vol 82, No. 397, pp 76-89, 1987.
- [3] J.L. Marroquín, M. Rivera, S. Botello, R. Rodríguez-Vera and M. Servín, "Regularization methods for processing fringe-pattern images," Applied Optics, Vol 38, No. 5, pp 788-795, 1999
- [4] D. Geman and G. Reynolds, "Constrained restoration and recovery of Discontinuities," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 14, pp 367-383, 1992.
- [5] M. Rivera and J.L. Marroquin, "The adaptive rest-condition spring system: an edge-preserving regularization technique," in Procc. of the IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP-2000), IEEE Signal Processing Society, Vancouver, BC, Canada, vol II, 805-807, Sept. 2000