

Estimación de incertidumbres en calibración de Osciladores

J. Mauricio López R.
División de Tiempo y Frecuencia
Centro Nacional de Metrología
mauricio.lopez@cenam.mx

Resumen

La frecuencia de salida de los osciladores debe ser considerada como un mensurando dependiente del tiempo. Las señales de frecuencia son “contaminadas” por ruido cuyo espectro puede ser caracterizado de manera directa por mediciones en el dominio de la frecuencia o bien por mediciones en el dominio del tiempo. Los resultados de medición para un valor específico de la frecuencia de Fourier en las mediciones en el dominio de la frecuencia están relacionados con la varianza de Allan estimada para un tiempo de premediación específico cuando se utilizan los métodos de medición en el dominio del tiempo. La incertidumbre de medición en osciladores está íntimamente relacionada con la estabilidad del mismo, la cual es caracterizada en el dominio del tiempo por la varianza de Allan.

1. Introducción

Abordamos en estas notas algunos comentarios sobre uno de los puntos centrales en la metrología de tiempo y frecuencia, la estimación de incertidumbres. Para tal efecto, comenzaremos citando a manera de ejemplo un caso que ayudará a entender los aspectos más importantes involucrados en la estimación de incertidumbres en la calibración de osciladores.

La figura 1 presenta un gráfico de las mediciones de diferencia de fase. Dichas mediciones fueron tomadas por espacio de 5 días realizando una medición cada 10 segundos. La referencia de frecuencia utilizada en este caso fue un reloj atómico de cesio de alto desempeño. Independientemente de los osciladores involucrados, el ejemplo ilustra las consideraciones en el análisis de las mediciones de un proceso de calibración para determinar la desviación de frecuencia de un oscilador así como su estabilidad y en última instancia las incertidumbres de medición.

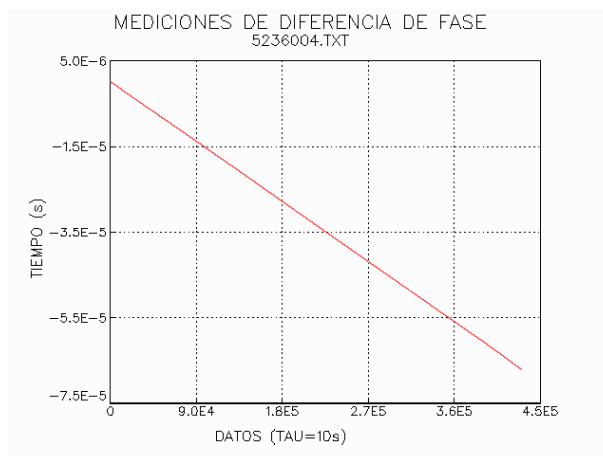


Figura 1. Gráfico de la diferencia de fase entre un reloj atómico de rubidio y un reloj atómico de Cesio de alto desempeño.

Cómo puede observarse en el gráfico, la diferencia de fase entre ambos osciladores muestra una dependencia con el tiempo que puede ser modelada, en primera aproximación, por una función lineal en el tiempo. La pendiente que presenta dicha función es una medida del promedio de la diferencia fraccional de frecuencias entre ambos osciladores. En el ejemplo que nos ocupa tenemos que:

$$\frac{\Delta f}{f_o} = -1,56 \times 10^{-10} \quad (1)$$

De esta relación encontramos que la desviación fraccional de frecuencia del oscilador bajo calibración puede ser considerada en una primera aproximación, como constante, esto es, independiente del tiempo. Sin embargo, haciendo un análisis de los residuos de las mediciones respecto al ajuste de una recta por mínimos cuadrados se tiene que dichos residuos son de la forma que indica la figura 2.

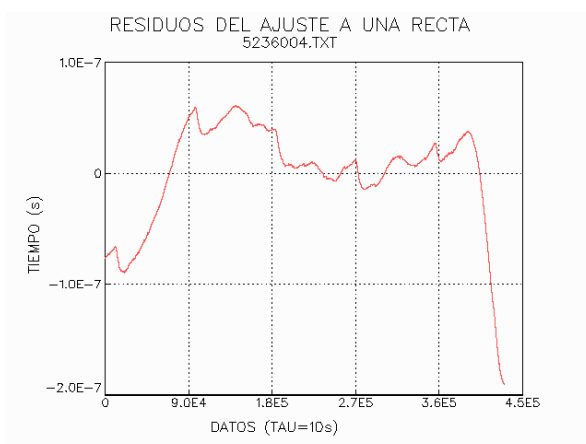


Figura 2. Residuos entre los resultados de la medición y el ajuste a una recta.

Por un lado, la pendiente de la línea que resulta del ajuste de las mediciones a una recta arroja información sobre el valor promedio de la desviación fraccional de frecuencia del oscilador bajo calibración, mientras que por otro los residuos dan información sobre la calidad del ajuste y por lo tanto están de alguna manera relacionados con la incertidumbre en la determinación de la desviación fraccional de frecuencia.

2. Estabilidad en frecuencia y varianza de Allan

Es muy importante notar que la información contenida en los residuos considera todos los efectos sistemáticos que influyen sobre el desempeño del oscilador bajo calibración. Entre tales efectos se encuentran los producidos por: temperatura, humedad, presión, vibraciones, etc. Por lo anterior, es de suma importancia realizar una correcta evaluación de la información contenida en este tipo de mediciones.

La desviación fraccional de frecuencia mostrada en la ecuación (1) es un efecto sistemático, y por lo tanto predecible, y en consecuencia susceptible de ser corregido. Supóngase que previamente a la calibración se utilizó algún método para corregir en oscilador la desviación fraccional de frecuencia representada por la ecuación (3.5), en tal caso es claro que los resultados de la medición serían los residuos mostrados en la figura anterior. Dichos resultados de medición no mostrarían un comportamiento predecible, de alguna manera sistemático, sino que mostrarían un comportamiento aleatorio. En tal caso la determinación de la desviación fraccional de frecuencia se convierte en una tarea muy interesante. Es claro que la desviación fraccional de frecuencia dependería del instante de medición, por ejemplo, si se mide en el primera quinta parte del tiempo de calibración se encontraría un resultado muy cercano a $+2 \times 10^{-12}$ mientras que si se mide en la última quinta porción se tiene un valor próximo a -8×10^{-12} . La figura siguiente ilustra tal caso:

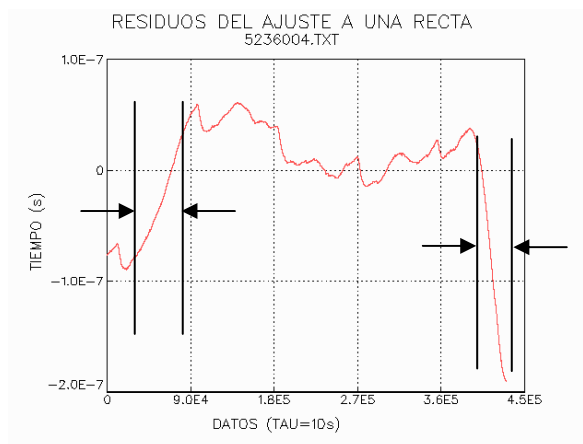


Figura 3. La desviación fraccional de frecuencia de un oscilador en general es función del tiempo. En el primer intervalo de tiempo mostrado en la figura la desviación fraccional de frecuencia es del orden de $+2 \times 10^{-12}$, mientras que en el segundo segmento tiene un valor cercano a -8×10^{-12} .

Tal como se puede observar, para este caso (y en general para todos los casos de las mediciones de tiempo y frecuencia) no existe una determinación única de la diferencia fraccional de frecuencia para los datos indicados en la figura 3. Más aún, la desviación fraccional de frecuencia depende del tiempo de promediación ó ventana de observación. Resulta clara la necesidad de recurrir a un método estadístico que permita hacer la evaluación de los corrimientos de frecuencia que están involucrados en la figura 3.11. El estimador estadístico para evaluar las desviaciones fraccionales de frecuencia como función de la ventana de observación (o tiempos de promediación) es justamente la varianza de Allan (o varianza modificada de Allan, según corresponda), la cual ya se ha introducido en secciones anteriores. Es importante hacer notar aquí la clara relación entre la varianza de Allan y la estimación de incertidumbres en los procesos de calibración de osciladores.

3. Incertidumbre de calibración

Resulta claro que las desviaciones fraccionales de frecuencia, que son funciones de la ventana de observación, determinadas a partir del análisis de los residuos mostrados en la figura 3 deben ser interpretadas como factores de incertidumbre en la diferencia fraccional de frecuencia promedio. De esta manera está justificado escribir que:

$$\frac{\Delta f}{f_o} = \left(\overline{\frac{\Delta f}{f}} \right) \pm \sigma_y(\tau), \quad (2)$$

donde el término $\left(\overline{\frac{\Delta f}{f}} \right)$ representa a la desviación fraccional de frecuencia promedio, la cual es constante (independiente del tiempo). Mientras que el término $\sigma_y(\tau)$ representa la desviación de Allan (la desviación de Allan es la raíz cuadrada de la varianza de Allan). La relación anterior es muy importante en los procesos de calibración de osciladores ya que por un lado aporta información sobre la desviación fraccional de frecuencia promedio y por otro indica la estabilidad en frecuencia del oscilador interpretada como incertidumbre en la determinación de la desviación fraccional de frecuencia total del oscilador. La relación (3.6) puede ser considerada como válida si la función $\sigma_y(\tau)$ está plenamente especificada. Dicha especificación puede darse de manera gráfica, analítica o en tablas.

Para el ejemplo que nos ocupa, la desviación fraccional de frecuencias total está dada por:

$$\frac{\Delta f}{f_o} = -1,56 \times 10^{-10} \pm \sigma_y(\tau) \quad (3)$$

donde $\sigma_y(\tau)$ está dada por la tabla siguiente.

Tabla 1 Estabilidad en frecuencia del oscilador bajo calibración denotada por la raíz de la varianza de Allan, AVAR

τ (s)	Raíz de AVAR	Barras de Incertidumbre	
		Inferior	Superior
10	$6,17 \times 10^{-12}$	$6,11 \times 10^{-12}$	$6,23 \times 10^{-12}$
20	$4,29 \times 10^{-12}$	$4,25 \times 10^{-12}$	$4,33 \times 10^{-12}$
40	$3,00 \times 10^{-12}$	$2,95 \times 10^{-12}$	$3,04 \times 10^{-12}$
80	$2,09 \times 10^{-12}$	$1,99 \times 10^{-12}$	$2,20 \times 10^{-12}$
160	$1,46 \times 10^{-12}$	$1,06 \times 10^{-12}$	$2,34 \times 10^{-12}$
320	$1,04 \times 10^{-12}$	$9,56 \times 10^{-13}$	$1,15 \times 10^{-12}$
640	$7,65 \times 10^{-13}$	$7,11 \times 10^{-13}$	$8,27 \times 10^{-13}$
1280	$7,22 \times 10^{-13}$	$6,71 \times 10^{-13}$	$7,81 \times 10^{-13}$
2560	$8,55 \times 10^{-13}$	$7,89 \times 10^{-13}$	$9,34 \times 10^{-13}$
5120	$1,05 \times 10^{-12}$	$9,54 \times 10^{-13}$	$1,16 \times 10^{-12}$
10200	$1,13 \times 10^{-12}$	$1,02 \times 10^{-12}$	$1,29 \times 10^{-12}$
20500	$1,40 \times 10^{-12}$	$1,22 \times 10^{-12}$	$1,64 \times 10^{-12}$
41000	$9,95 \times 10^{-13}$	$8,37 \times 10^{-13}$	$1,23 \times 10^{-12}$
81900	$7,83 \times 10^{-13}$	$6,23 \times 10^{-13}$	$1,05 \times 10^{-12}$
164000	$3,94 \times 10^{-13}$	$2,83 \times 10^{-13}$	$6,52 \times 10^{-13}$

Tabla 3.1. Estabilidad en frecuencia del oscilador bajo calibración denotada por la raíz de la varianza de Allan, AVAR.

Al describir la relación anterior para expresar la frecuencia del oscilador bajo calibración como función de la frecuencia del oscilador patrón, se tiene que:

$$f = (1 - 1,56 \times 10^{-10} \pm \sigma_y(\tau)) f_0 \quad (4)$$

donde f es la frecuencia del instrumento bajo calibración y, f_0 es la frecuencia patrón. Nótese de esta relación que la incertidumbre en la estimación de $\sigma_y(\tau)$ es una incertidumbre de segundo orden (incertidumbre de la incertidumbre) en la estimación de la frecuencia del oscilador bajo calibración. Tal incertidumbre en $\sigma_y(\tau)$ es rara vez considera en los procesos de calibración.

Conclusiones

La frecuencia de los osciladores debe ser considerada como un mensurando dependiente del tiempo. Las señales de frecuencia son “contaminadas” por ruido cuyo espectro puede ser caracterizado de manera directa por mediciones en el dominio de la frecuencia o bien por mediciones en el dominio del tiempo. La incertidumbre de medición en osciladores está íntimamente relacionada con la estabilidad del mismo, la cual es caracterizada en el dominio del tiempo por la varianza de Allan. La estimación de la estabilidad del oscilador bajo calibración por medio de la varianza de Allan toma en cuenta el total de los factores de influencia que actúan sobre el oscilador. La varianza

de Allan es interpretada como la incertidumbre de medición la cual depende también del tiempo de premediación τ .

Apéndice. *Definición de la varianza de Allan*

En este apéndice se define el estimador de dispersión para la diferencia fraccional de frecuencia más importante en la metrología de tiempo y frecuencia; la varianza de Allan. En primer término presentamos la definición matemática y, posteriormente, se discute su dependencia con el tiempo de promediación τ .

Considérese las $N-2$ submuestras de mediciones

$$\{y_1, y_2\}, \{y_2, y_3\}, \{y_3, y_4\}, \dots, \{y_{N-2}, y_{N-1}\} \quad (\text{A.1})$$

de la muestra $M_y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1}\}$ que es el conjunto de mediciones de diferencia fraccional de frecuencia. Denotaremos por σ_i^2 a la varianza estándar de la submuestra $\{y_i, y_{i+1}\}$. La varianza de Allan, σ_y^2 , de la muestra M_y está definida por la relación:

$$\sigma_y^2 = \langle \sigma_i^2 \rangle \quad (\text{A.2})$$

donde $\langle \cdot \rangle$ significa promedio¹. En términos de las varianzas fraccionales de frecuencia, y_i , la varianza de Allan puede ser escrita en la forma

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \langle (\Delta y_i)^2 \rangle \quad (\text{A.3})$$

donde $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, o en términos de las diferencias de fase x_i

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\tau_0^2} \langle (\Delta^2 x_i)^2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

con $\Delta^2 x_i = y_{i+1} - y_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$, es decir:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\tau_0^2 (N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2 \quad (\text{A.5})$$

σ_y^2 es una medida de la estabilidad en frecuencia para tiempos de observación (o premediación) de τ_0 . De la muestra M_x se puede obtener la estabilidad en frecuencia del

¹ En la definición estrictamente formal de la varianza de Allan el promedio, $\langle \cdot \rangle$, se considera sobre infinitas varianzas σ_i^2 . Por supuesto, esto tiene sus obvias restricciones experimentales.

oscilador bajo prueba para tiempos de promediación τ que son múltiplos enteros de τ_0 , $\tau=m\tau_0$ con $m=1, 2, 3, \dots, \lfloor N/3 \rfloor$, de la siguiente manera. De la muestra

$$M_x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\} \quad (\text{A.6})$$

se toma una de las m submuestras de la forma

$$M'_x = \{x_k, x_{k+m}, x_{k+2m}, \dots, x_{k+lm}\} \quad (\text{A.7})$$

con $1 \leq k \leq m-1$ y $(N-m-k)/m \leq l \leq (N-m)/m$ (por facilidad se puede tomar $k=1$, en consecuencia, l es la parte entera del cociente $(N-1)/M$). La varianza de Allan calculada a partir de esta muestra es una estimación de la varianza de Allan para tiempos de promediación de $\tau=m\tau_0^2$ de la muestra M_x .

Es muy interesante considerar la dependencia funcional de la varianza de Allan respecto al tiempo de promediación τ . En la tabla siguiente se resume la correspondencia entre los términos de la densidad espectral de frecuencia y la varianza de Allan para los cinco tipos de ruido más comunes en los osciladores.

Tipo de ruido	$S_y(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$
White phase modulation	$h_2 f^2$	$3f_h h_2 / 4\pi^2 \tau^2$
Flicker phase modulation	$h_1 f$	$\frac{1.038 + \ln(2\pi f_h \tau)}{4\pi^2 h_1 \tau^2}$
White frequency modulation	h_0	$h_0 / 2\tau$
Flicker frequency modulation	$h_{-1} f^{-1}$	$2h_{-1} \ln 2$
Random walk frequency modulation	$h_{-2} f^{-2}$	$4\pi^2 h_{-2} \tau / 6$

Tabla 2.1. Correspondencia entre los términos de la densidad espectral de frecuencia y la varianza de Allan para los cinco tipos de ruido mas importantes en los osciladores de alta exactitud. Por razones de convergencia, se ha supuesto que para frecuencias mayores a la frecuencia de corte f_h la densidad espectral de frecuencia es cero.

La dependencia funcional de σ_y^2 respecto al parámetro τ es de la forma $\sigma_y^2 \sim \tau^\mu$, de manera que σ_y^2 es función de τ y por lo tanto, la notación $\sigma_y^2(\tau)$ está justificada. Los

² Nótese que de la muestra M_x sólo se puede obtener la estabilidad en frecuencia del oscilador bajo prueba para tiempos no menores que τ_0 . En el caso que sea necesario calcular la estabilidad para tiempos de promediación $\tau' < \tau_0$ será necesario realizar un experimento para obtener una muestra de mediciones $x_i = x(t_i)$ con la condición $t_{i+1} - t_i < \tau'/k$, donde k es un entero positivo.

cinco tipos de ruido presentes en los osciladores corresponden a diferentes valores del parámetro μ en la varianza de Allan de acuerdo a la siguiente relación:

- | | |
|-----------------|----------------------------------|
| 1) $\mu = -1$ | Random walk frequency modulation |
| 2) $\mu = -1$ | Flicker frequency modulation |
| 3) $\mu = -1/2$ | White frequency modulation |
| 4) $\mu = 0$ | Flicker phase modulation |
| 5) $\mu = +1/2$ | White phase modulation |

En la figura siguiente se muestra una gráfica típica de estabilidad de frecuencia medida en términos de la varianza de Allan. Obsérvese la dependencia de dependencia lineal por intervalos de $\log \sigma_y^2$ respecto de la variable $\log \tau$. En la figura se indica que σ_y^2 tiene la misma dependencia funcional de τ tanto para el ruido *white phase modulation* como para el ruido *flicker phase modulation*, en este sentido decimos que la varianza de Allan no distingue tales ruidos entre sí. En el caso en que es necesaria hacer distinción entre estos dos tipos de ruido se requiere la introducción de un nuevo estimador para la diferencia fraccional de frecuencia. En la siguiente sección se presenta la varianza de Allan modificada, denotada por $\text{Mod}\sigma_y^2$, la cual tiene la importante propiedad de distinguir los ruidos *white phase modulation* y *flicker phase modulation*.

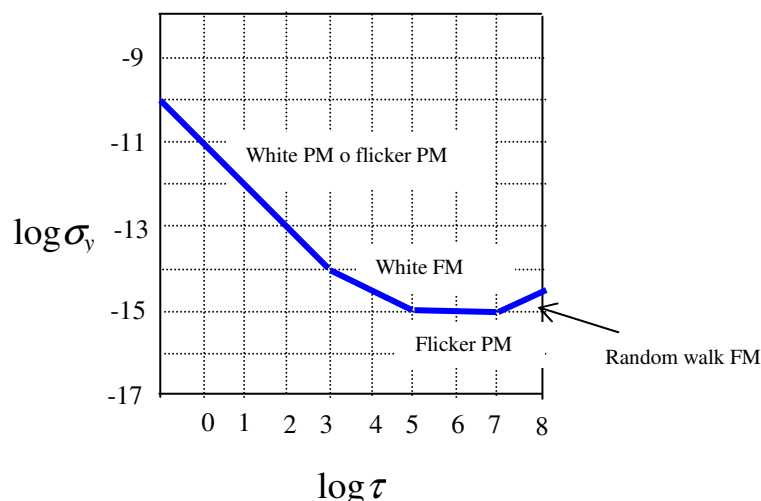


Figura 2.1. Dependencia típica de la estabilidad en frecuencia de osciladores de alta exactitud, medida en términos de la varianza de Allan, como función del tiempo de observación τ .

Resulta claro que la interpretación de la varianza de Allan debe darse en el marco de la estadística.

Una vez definida la varianza de Allan y los cinco tipos de ruido presentes en los osciladores estamos en condiciones de hacer una comparación de las diferencias en el cálculo de la estabilidad de frecuencia utilizando por un lado la varianza estándar y por otro la varianza de Allan. Este es un punto muy importante ya que a menudo no se entiende la importancia de utilizar la varianza de Allan como estimador de la estabilidad en frecuencia de los osciladores. En el único caso en el cual el resultado de evaluar la

estabilidad de frecuencia utilizando la varianza estándar y la varianza de Allan es el mismo es aquel en el que la señal de frecuencia está contaminada con ruido blanco de frecuencia (*white frequency noise*). Para el caso en que la contribución de ruido en la señal es del tipo *random walk frequency noise* la diferencia entre la varianza estándar y la varianza de Allan crece rápidamente en la medida que el número de mediciones aumenta, específicamente se tiene que:

$$\frac{\sigma^2(N, \tau)}{\sigma^2(2, \tau)} \propto N \quad (\text{A.8})$$

donde $\sigma^2(N, \tau)$ representa la varianza estándar calculada para tiempos de promediación τ , $\sigma^2(2, \tau)$ es la varianza de Allan calculada para tiempos de promediación τ y N es el número de mediciones. La constante de proporcionalidad es cercana a 1. La dependencia de cociente $\frac{\sigma^2(N, \tau)}{\sigma^2(2, \tau)}$ respecto al número de mediciones para el caso de los

otros tipos de ruido se muestra gráficamente en la figura 2.2, en donde el coeficiente μ está dado por la relación

$$\sigma^2(2, \tau) \propto \tau^\mu \quad (\text{A.9})$$

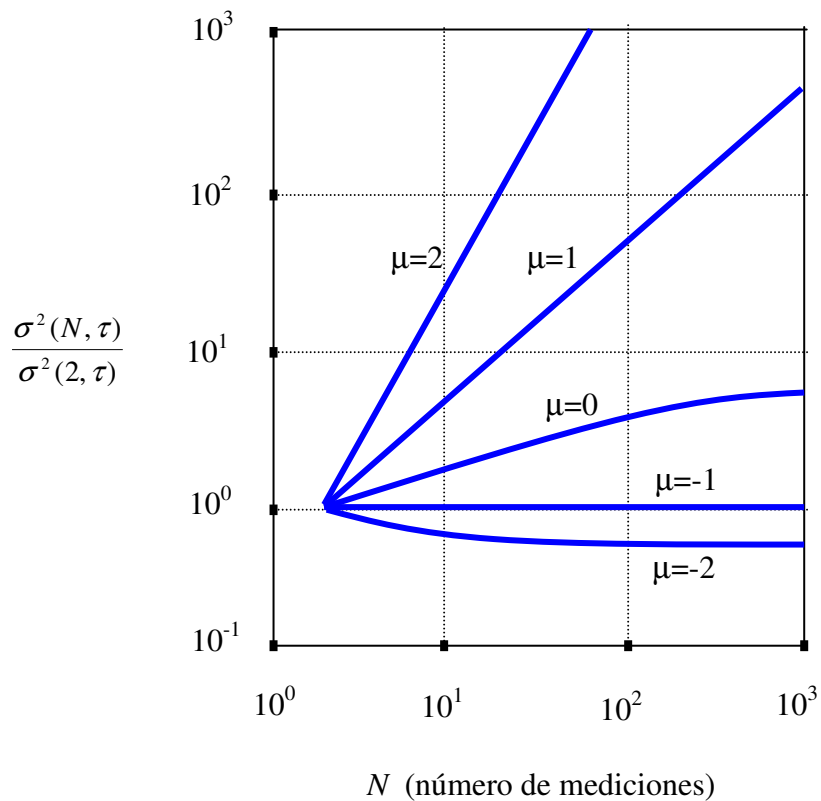


Figura 2.2 Dependencia del cociente $\frac{\sigma^2(N, \tau)}{\sigma^2(2, \tau)}$ respecto al número de mediciones N .

Donde $\sigma^2(N, \tau)$ representa la varianza estándar calculada para tiempos de promediación τ , $\sigma^2(2, \tau)$ es la varianza de Allan calculada para tiempos de promediación τ