

Uso de la Varianza de Allan en
Procesos de Calibración de
osciladores

Contenido

1. Introducción
2. Osciladores de cuarzo
3. Estabilidad en frecuencia y la varianza de Allan
4. Resultados de medición
5. Conclusiones

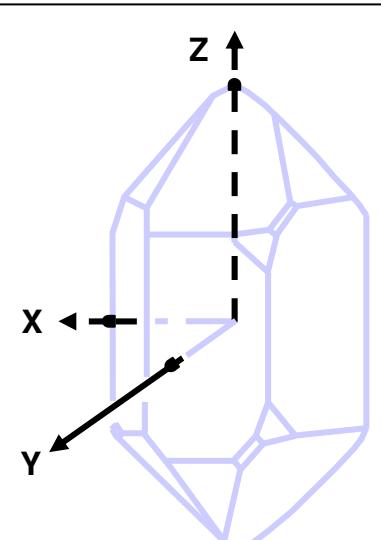
1. Introducción

Los osciladores de cuarzo son ampliamente usados en la metrología de tiempo y frecuencia como bases de tiempo en los instrumentos de generación y medición de frecuencia. El conocimiento del desempeño de los osciladores de cuarzo es parte fundamental tanto del proceso de calibración como de la evaluación adecuada de las incertidumbres de medición.

2. Osciladores de cuarzo

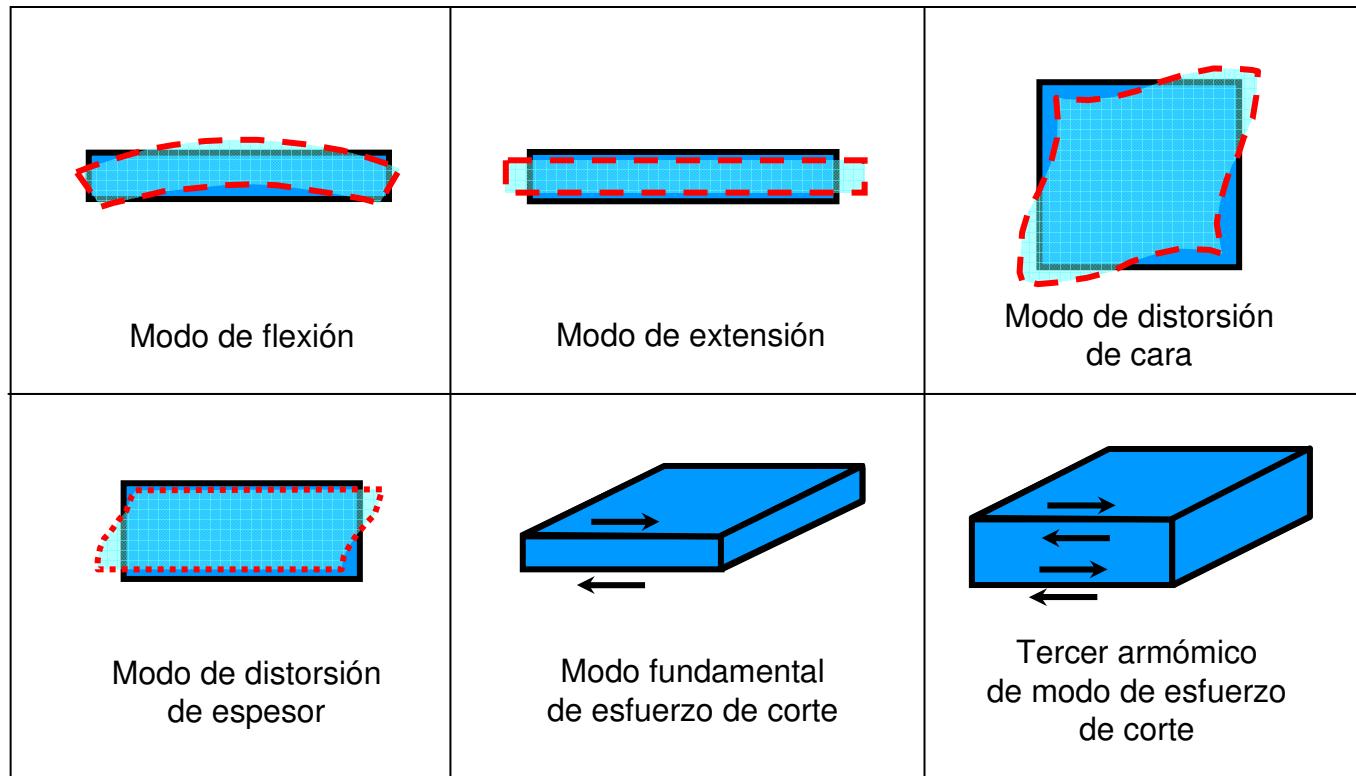
El efecto piezoeléctrico en cuarzo

Deformación		Campo a lo largo de:		
		X	Y	Z
EXTENSION	X	✓		
	Y	✓		
	Z			
CORTE	X	✓		
	Y		✓	
	Z		✓	



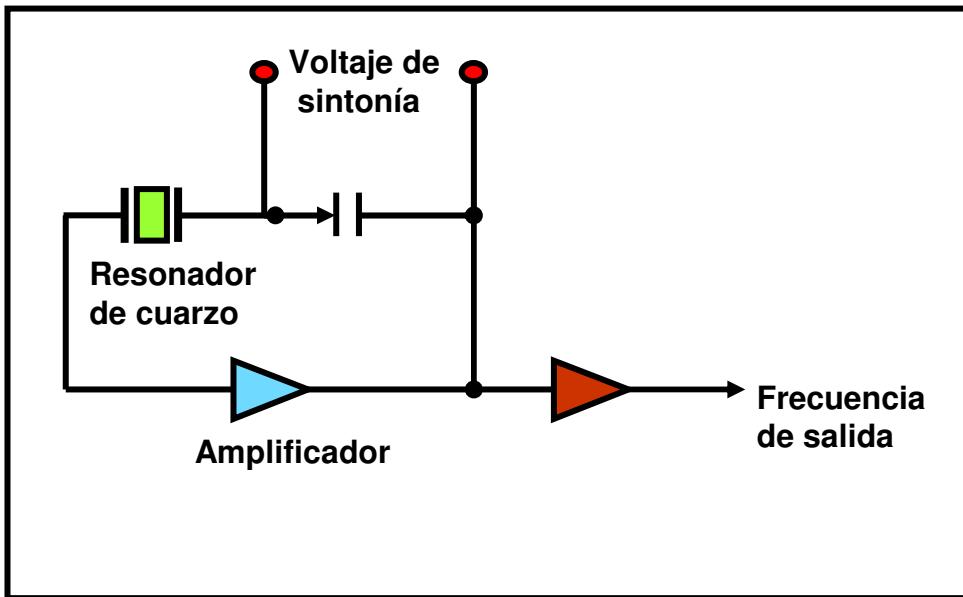
En el cuarzo, los cinco componentes de esfuerzo pueden ser generados por un campo eléctrico. Los modos de oscilación pueden ser excitados por la acción de electrodos propiamente colocados. El esfuerzo de corte a lo largo del eje Z producido por la acción de campos eléctricos a lo largo del eje Y es usado en la familia de osciladores con el corte Y, incluyendo los cortes AT, BT, and ST.

Modos de oscilación



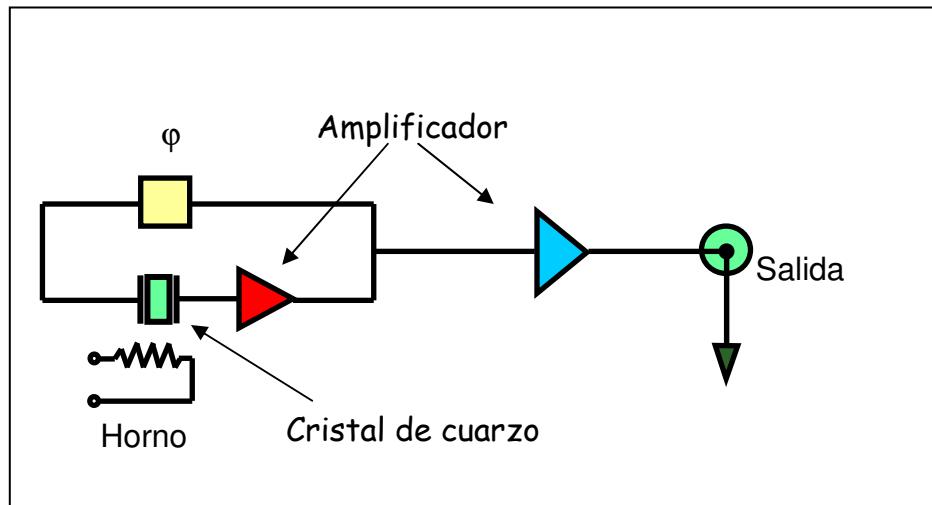
Las frecuencias normales de oscilación en las estructuras mecánicas, particularmente en los cristales de cuarzo, dependen del modo de oscilación. Los diversos modos de oscilación en los cristales de cuarzo pueden ser excitados utilizando los electrodos adecuados.

Oscilador de cuarzo



El principio de funcionamiento de un oscilador de cuarzo se fundamenta en el efecto de resonancia el cual aparece cuando la frecuencia normal de oscilación del cristal de cuarzo coincide con la frecuencia de oscilación de un circuito eléctrico (ver figura). Bajo condiciones de resonancia, la señal de frecuencia en el lazo crece hasta llegar un umbral en el cual la frecuencia es dirigida a una salida.

Diagrama a bloques para un OCXO

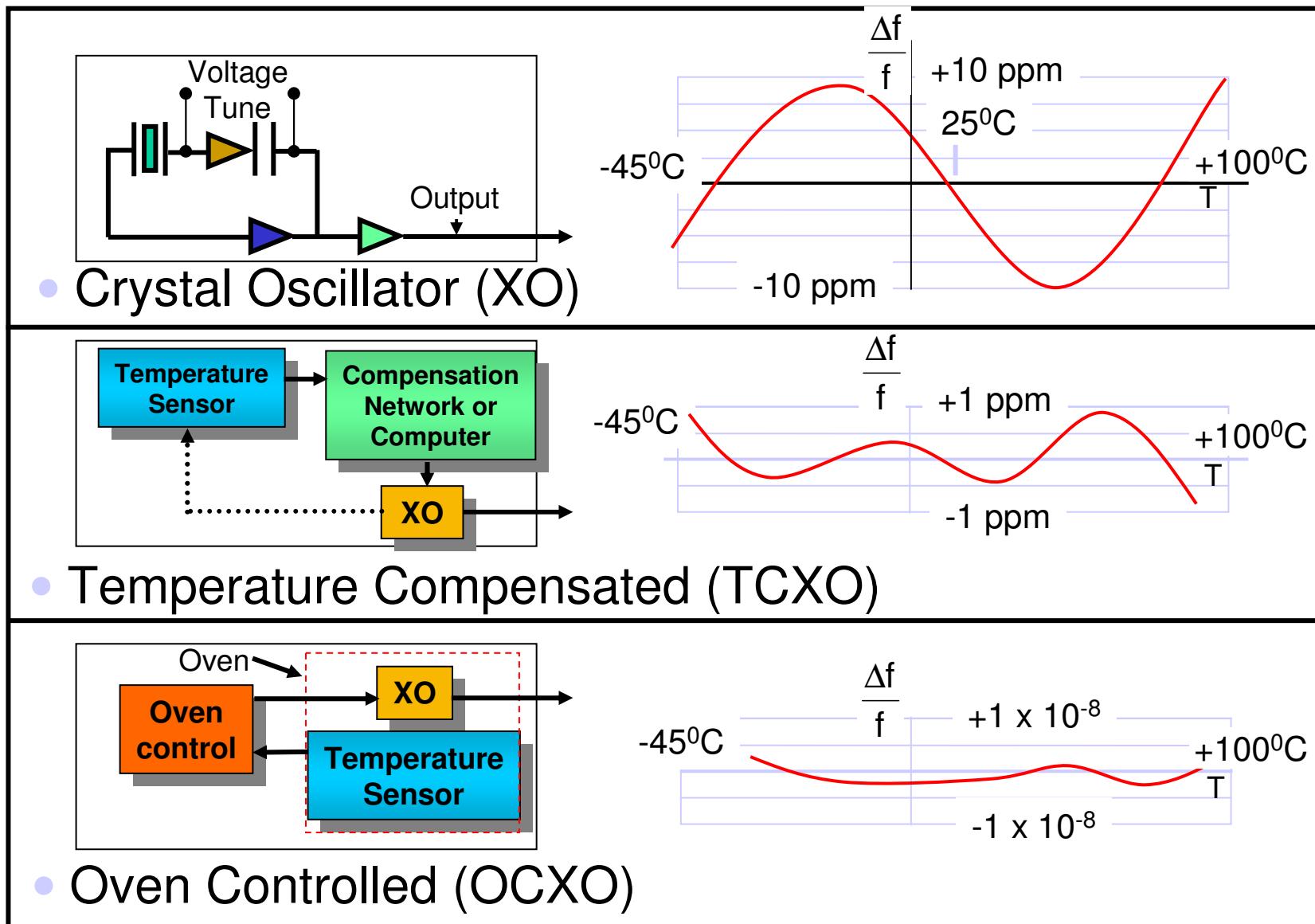


El parámetro de influencia más importante en la operación de los osciladores de cuarzo es la temperatura. Esto es así debido a que la estructura mecánica del cuarzo es sensible a la temperatura ya que ésta afecta el estado de agitación (térmica) de los átomos que forman el cristal lo cual cambia a su vez la frecuencia normal de oscilación. A efecto de mantener la temperatura del cristal constante es posible utilizar un horno reduciendo así el coeficiente de sensibilidad a cambios de temperatura del laboratorio.

Acrónimos para osciladores de cuarzo más comunes

- **XO**.....Crystal Oscillator
- **VCXO**.....Voltage Controlled Crystal Oscillator
- **OCXO**.....Oven Controlled Crystal Oscillator
- **TCXO**.....Temperature Compensated Crystal Oscillator
- **TCVCXO**.....Temperature Compensated/Voltage Controlled Crystal Oscillator
- **OCVCXO**.....Oven Controlled/Voltage Controlled Crystal Oscillator
- **MCXO**.....Microcomputer Compensated Crystal Oscillator
- **RbXO**.....Rubidium-Crystal Oscillator

Desempeño de osciladores por categoría



Desempeño de osciladores por categoría

La figura anterior muestra el desempeño típico para los tres tipos más comunes de osciladores de cuarzo. Cuando un oscilador de cuarzo no contiene ningún tipo de control de temperatura, ni de compensación por efectos de ésta, los corrimientos de frecuencia cuando el oscilador es operado en condiciones de temperatura de -50°C a 100 °C son típicamente de 1 parte en 10^5 . Cuando es utilizado un sensor de temperatura para compensar los efectos de ésta los corrimientos en frecuencia son típicamente de 1 parte en un millón. Finalmente, los osciladores de cuarzo más estable son aquellos que posén un horno para mantener al cristal en un ambiente de temperatura uniforme. Existen diseños en los cuales los cristales están dentro de dos hornos de temperatura. Los corrimientos de frecuencia en estos tipos de osciladores en condiciones ambientales de operación con temperatura no controlada está entre 1 parte en 10^8 y 1 parte en 10^9 .

Aplicaciones típicas de osciladores por categoría

Tipo de oscilador*	Incertidumbre**	Aplicación
• <i>Crystal oscillator (XO)</i>	10^{-5} to 10^{-4}	Computadoras
• <i>Temperature compensated crystal oscillator (TCXO)</i>	10^{-6}	Comunicación inalámbrica móvil
• <i>Microcomputer compensated crystal oscillator (MCXO)</i>	10^{-8} to 10^{-7}	Comunicación en espectro disperso
• <i>Oven controlled crystal oscillator (OCXO)</i>	10^{-8} (with 10^{-10} per g option)	Metrología, navegación
• Reloj atómico “pequeños” (Rb, RbXO)	10^{-9}	Comunicación por satélites
• Reloj atómico de alto desempeño (Cs)	10^{-12} to 10^{-11}	Posicionamiento global

* Tamaños típicos desde $<5\text{ cm}^3$ para osciladores de cuarzo hasta >30 litros para relojes de cesio. Costos desde \$5 dólares para osciladores de cuarzo hasta \$50,000 dólares para relojes de cesio.

** Incluye efectos ambientales (de -40°C a $+75^\circ\text{C}$) .

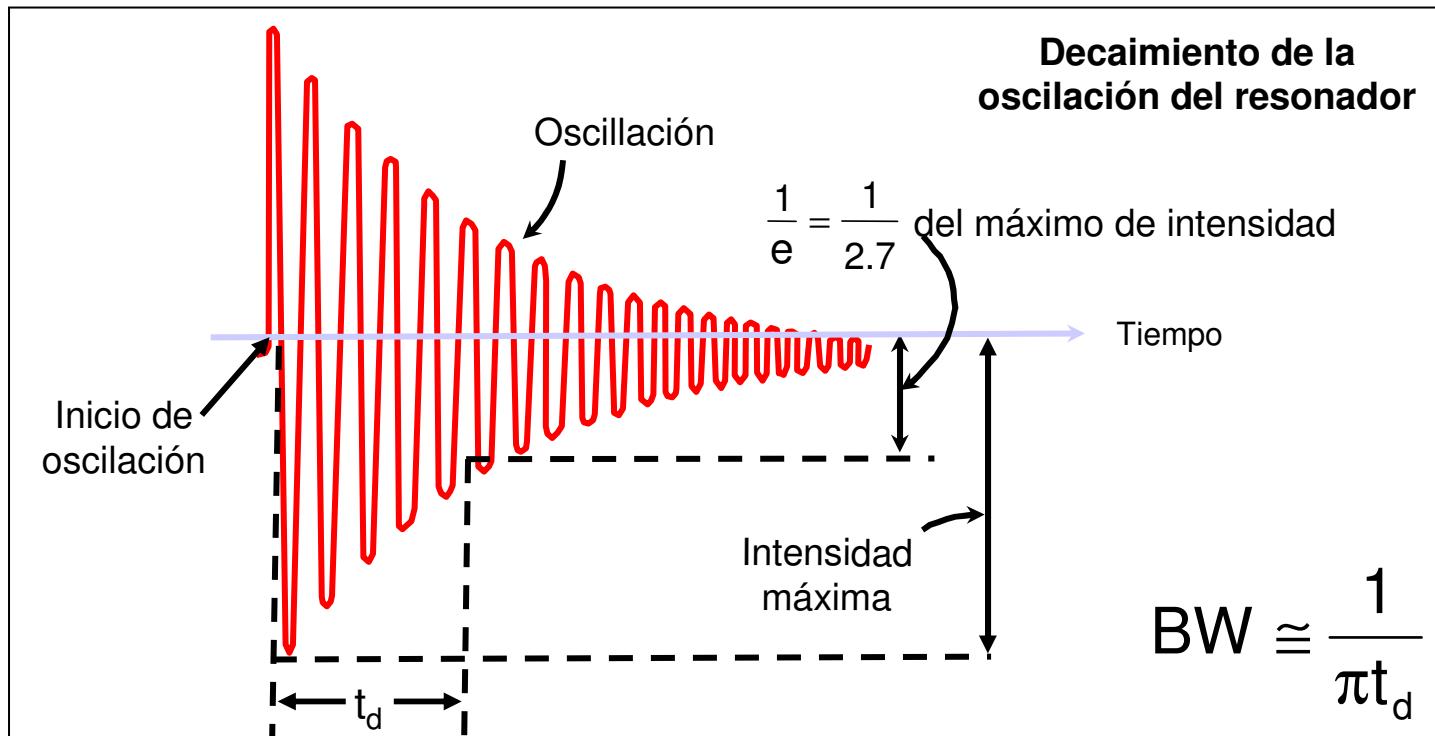
Factor de calidad, Q

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{Energía almacenada por ciclo}}{\text{Energía disipada por ciclo}}$$

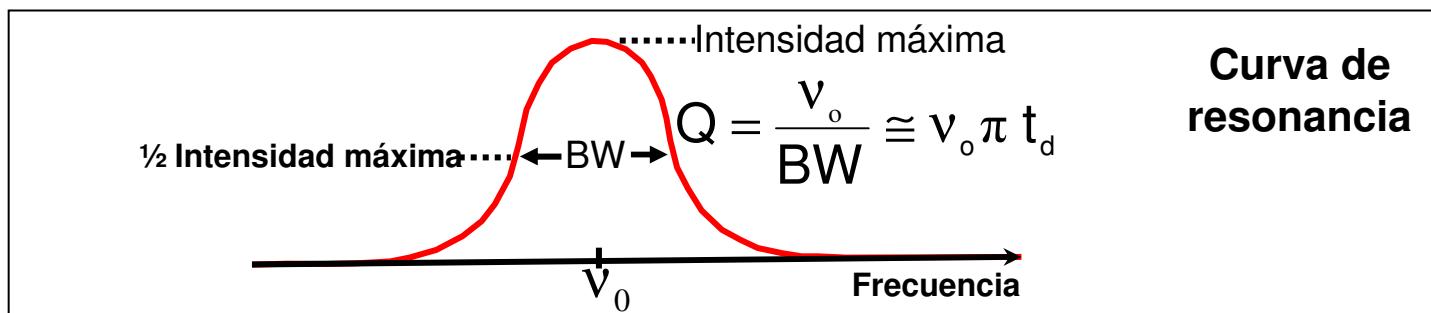
Q es proporcional al tiempo de decaimiento e inversamente proporcional al ancho de línea.

A mayor Q, mayor estabilidad de frecuencia y mayor potencial de exactitud en el resonador. Por ejemplo, si Q = 10⁶, entonces una exactitud de 10⁻¹⁰ requiere determinar el centro de la curva de resonancia a 0.01% del ancho de la línea, y la estabilidad de 10⁻¹² requiere que la frecuencia del resonador permanezca cerca del máximo de la curva de resonancia con un alejamiento del centro de la línea no mayor a 10⁻⁶ del ancho de la misma.

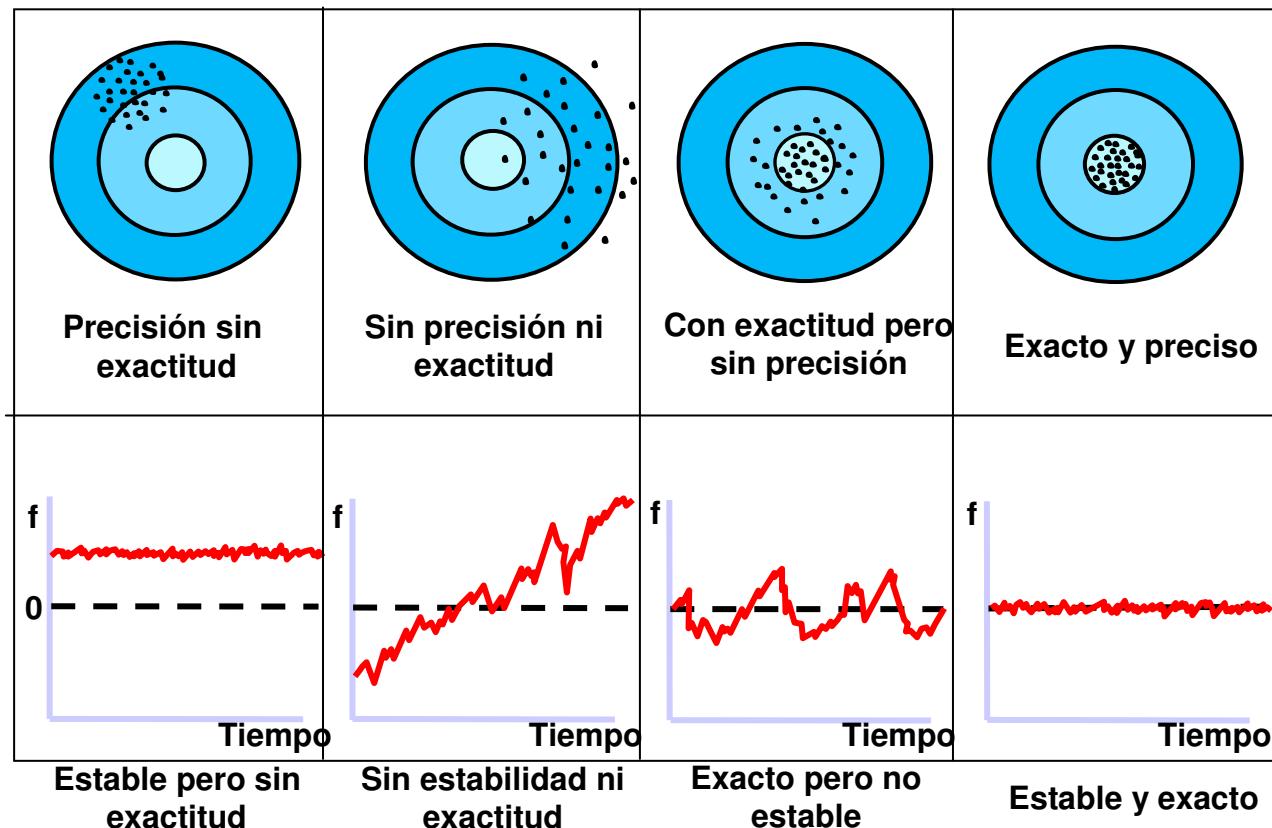
Tiempo de decaimiento, ancho de línea, y Q



$$BW \cong \frac{1}{\pi t_d}$$



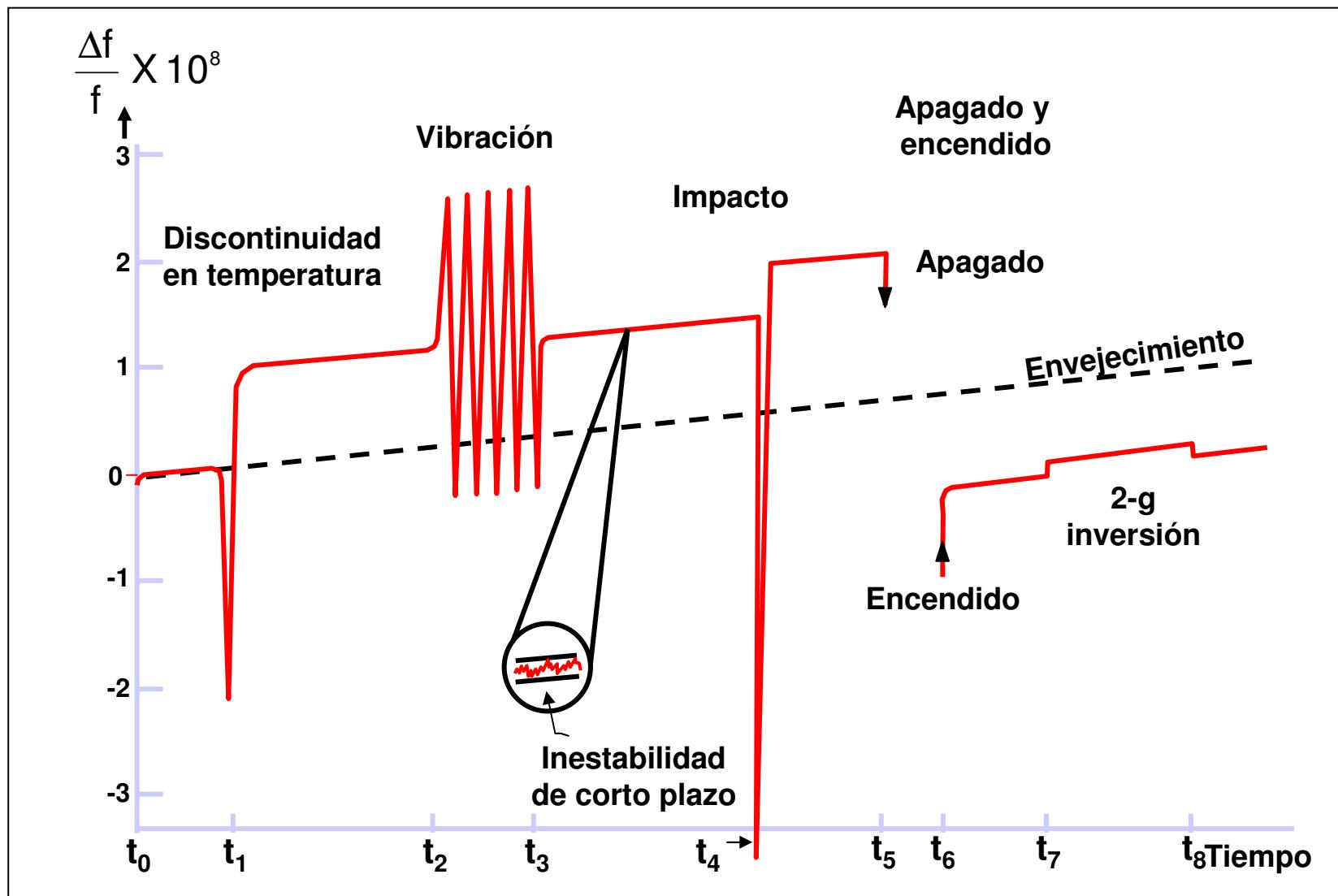
Estabilidad y Exactitud



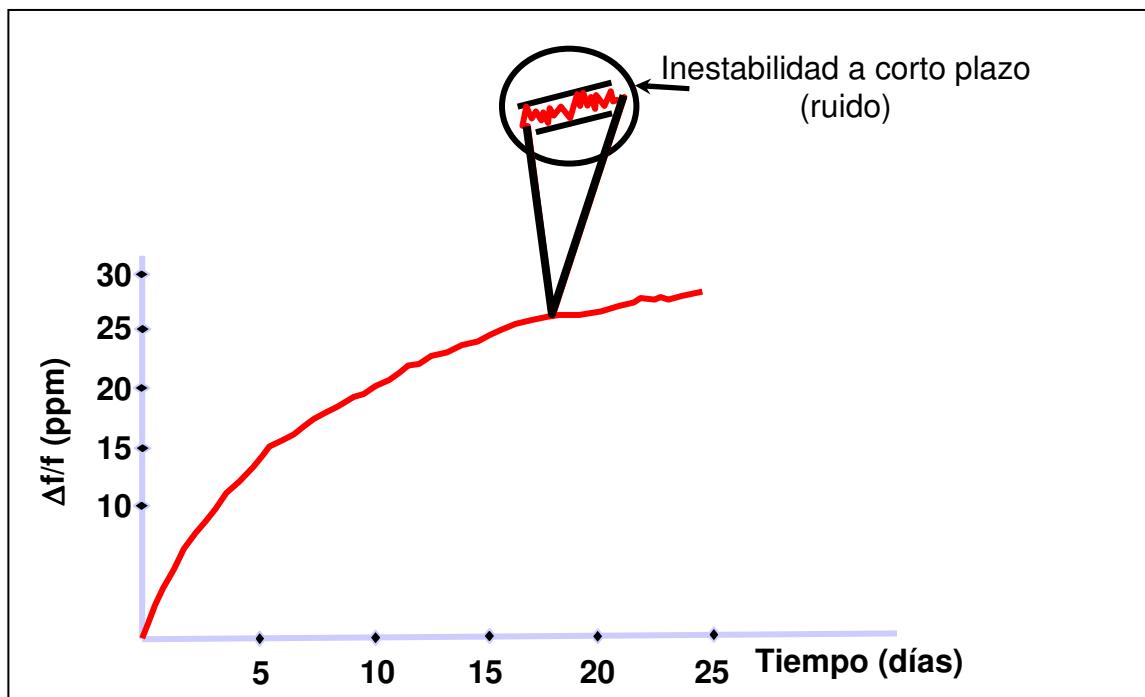
Factores de influencia en la frecuencia de osciladores de cuarzo

- **Tiempo**
 - Ruido a corto plazo
 - Ruido a mediano plazo (por ejemplo, temperatura del oscilador)
 - Inestabilidades a largo plazo (por ejemplo: envejecimiento)
- **Temperatura**
 - Dependencia de la frecuencia como función de la temperatura
 - Dependencia dinámica de la frecuencia respecto a la temperatura (periodo de calentamiento, impáctos térmicos)
 - Memoria térmica ("histéresis")
- **Aceleración**
 - Gravedad ($2g$ inversión)
 - Vibración
 - Ruido acústico
 - Impacto
- **Radiación ionizante**
 - Radiación electromagnética ionizante (rayos X, rayos γ)
 - Partículas (neutrones, protones, electrones)
- **Otros**
 - Variaciones de tensión
 - Presión atmosférica
 - Humedad
 - Impedancia de carga
 - Campo magnético

Fluctuaciones de frecuencia en osciladores de cuarzo



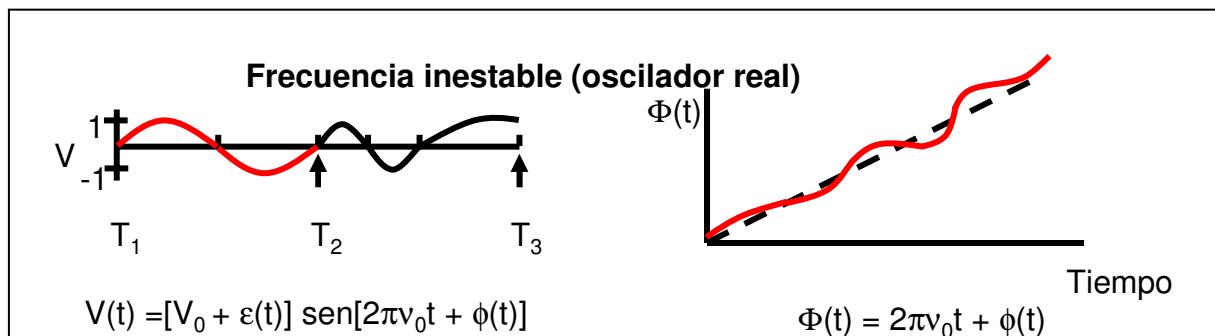
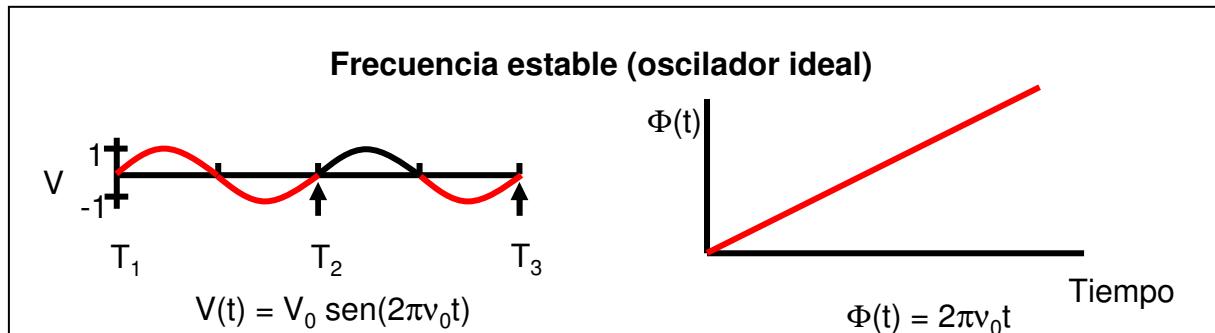
Envejecimiento y estabilidad



El proceso de envejecimiento de un oscilador de cuarzo se manifiesta en un corrimiento de frecuencia de largo plazo. Diversos factores de operación pueden acelerar el proceso de envejecimiento en un oscilador de cuarzo. Los procesos de inestabilidad y envejecimiento se diferencian en que uno (el envejecimiento) se manifiesta en un corrimiento de la frecuencia siempre en la misma dirección, mientras que en el otro (la inestabilidad) el corrimiento de la frecuencia va en una dirección y otra.

3. Estabilidad en frecuencia y varianza de Allan

Inestabilidades a corto plazo



Frecuencia instantánea $v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = v_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$

$V(t)$ = Voltaje de salida del osc.,

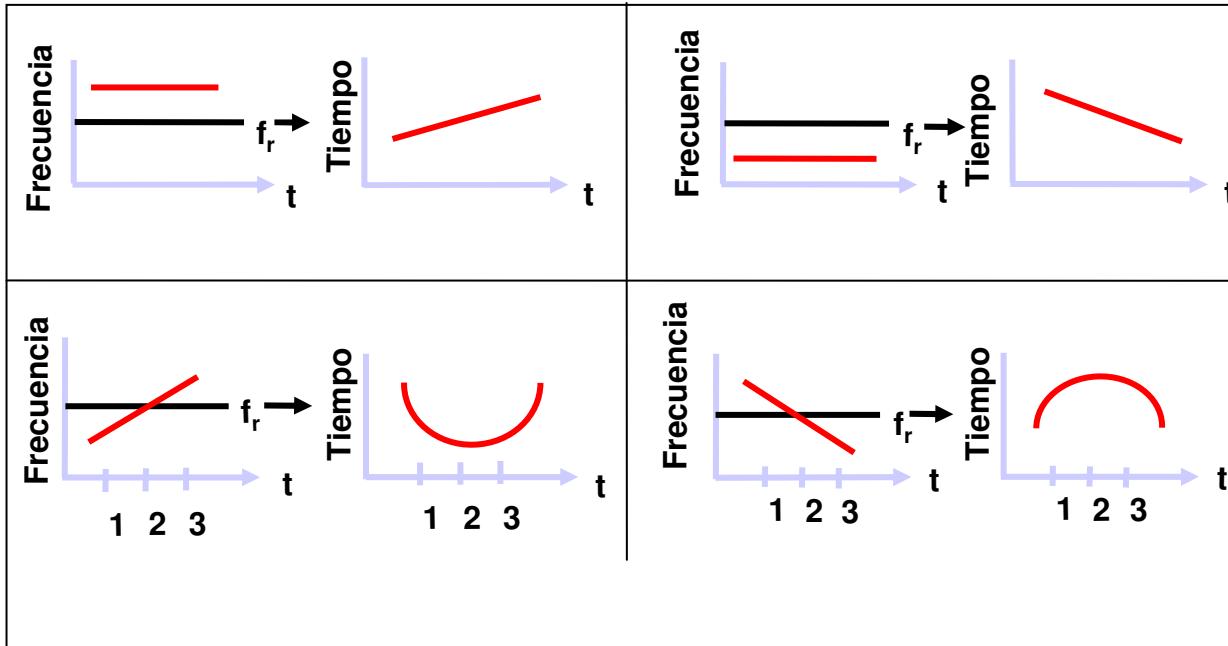
$\varepsilon(t)$ = Ruido de amplitud,

$\Phi(t)$ = Fase,

V_0 = Amplitud de voltaje

v_0 = Frecuencia de la portadora

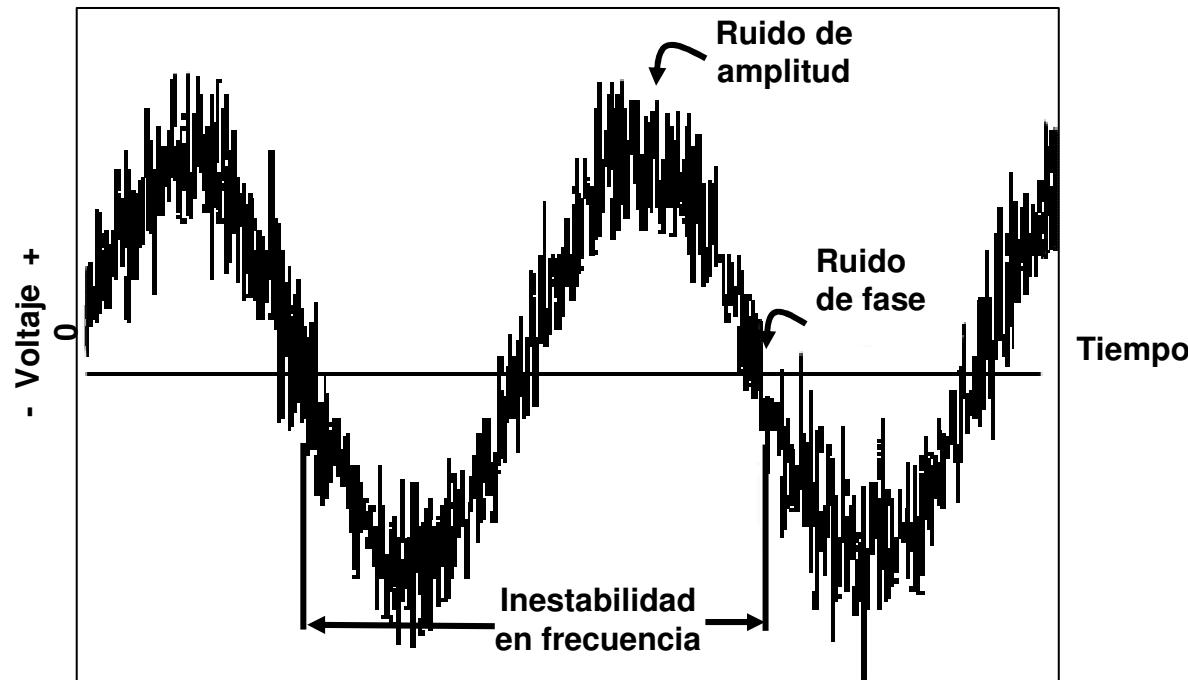
Error en frecuencia y error en tiempo



$$f_r = \text{frecuencia de referencia}$$

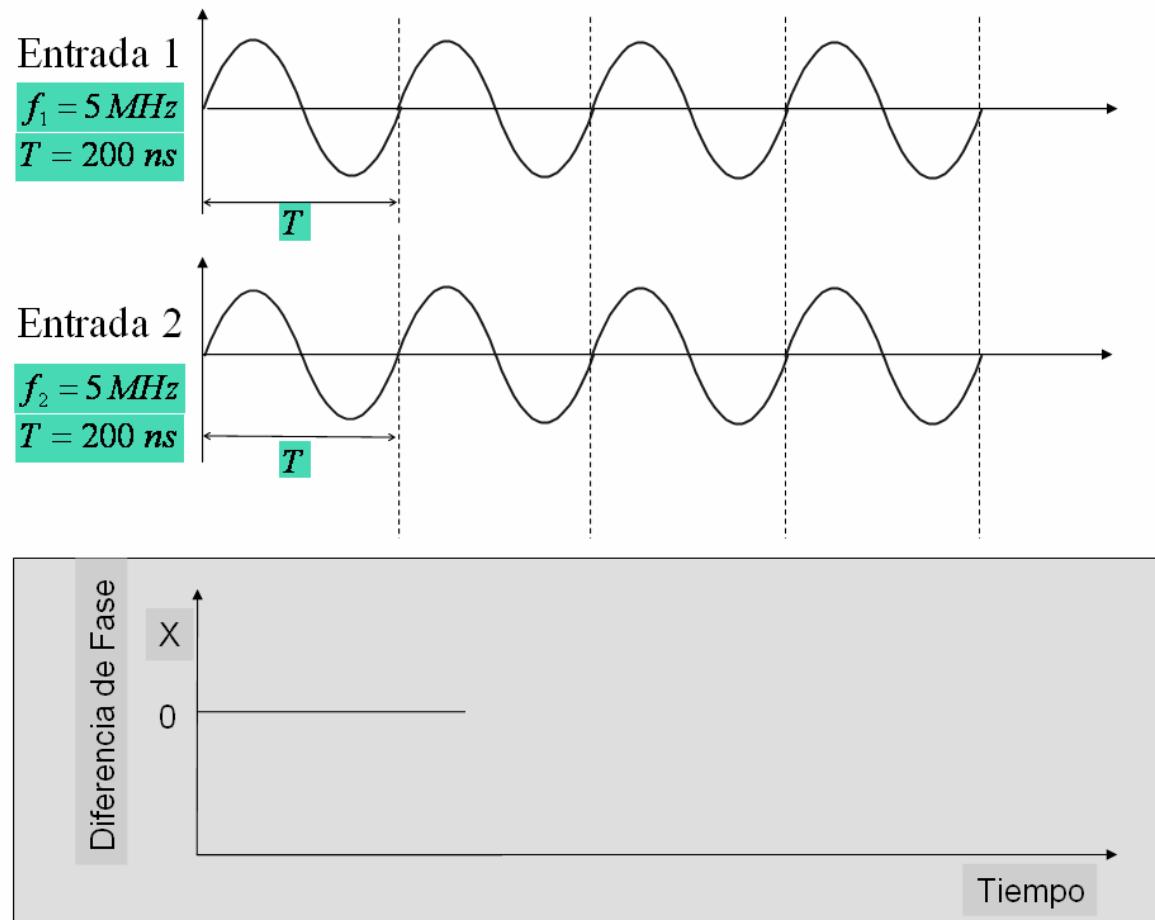
Debido a que la frecuencia puede expresarse como la derivada de la fase, un corrimiento sistemático en la frecuencia de un oscilador se manifiesta como un incremento lineal en la fase del mismo. Un corrimiento lineal en la frecuencia induce en la fase del oscilador una dependencia cuadrática en el tiempo.

Ruidos en señales de frecuencia



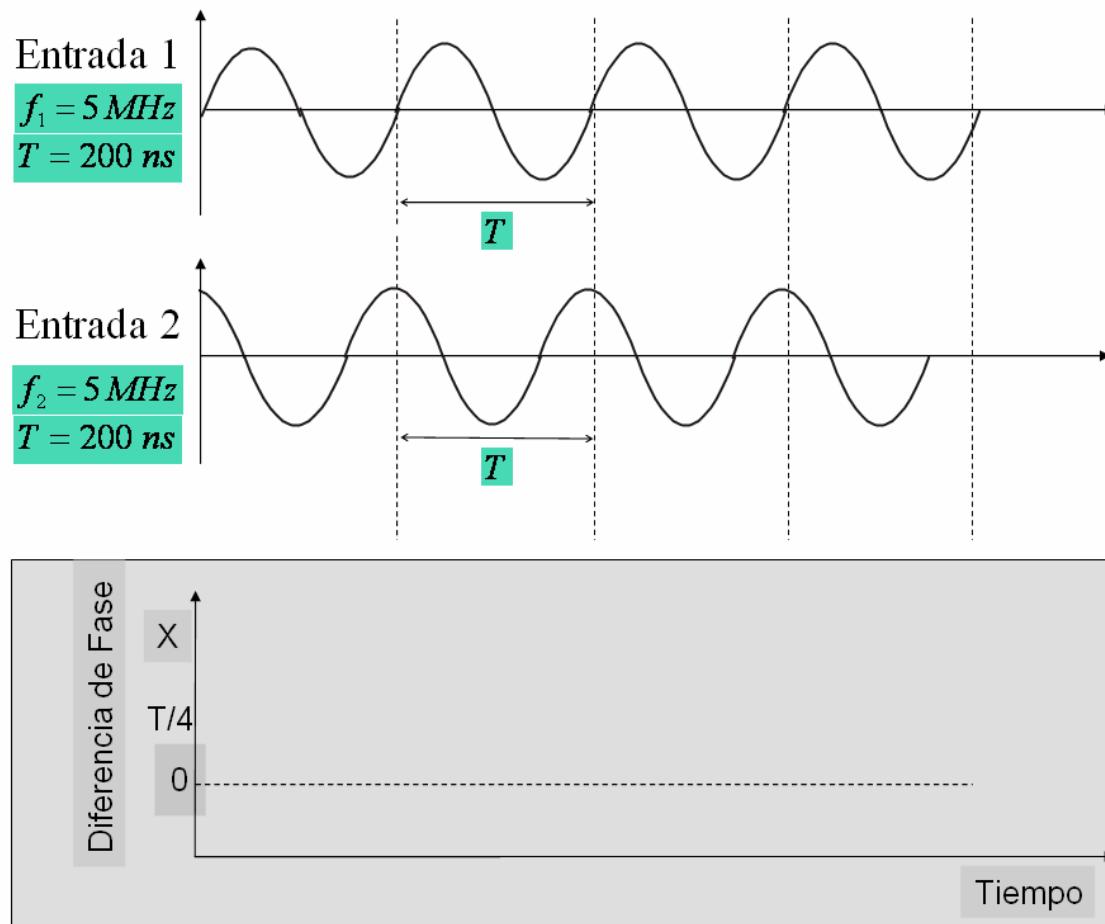
Debe ser claro que no existen señales de frecuencia perfectas. Las señales eléctricas de frecuencia están "contaminadas con ruido". La cantidad de ruido en una señal de frecuencia está estrechamente relacionada con la estabilidad de la misma. La indeterminación del máximo en la señal de frecuencia (ver figura) está asociado a ruido en amplitud. La indeterminación del cruce por cero se relaciona con el ruido de fase, mientras que la indeterminación de la duración del periodo está ligada al ruido en frecuencia.

Algunos ejemplos



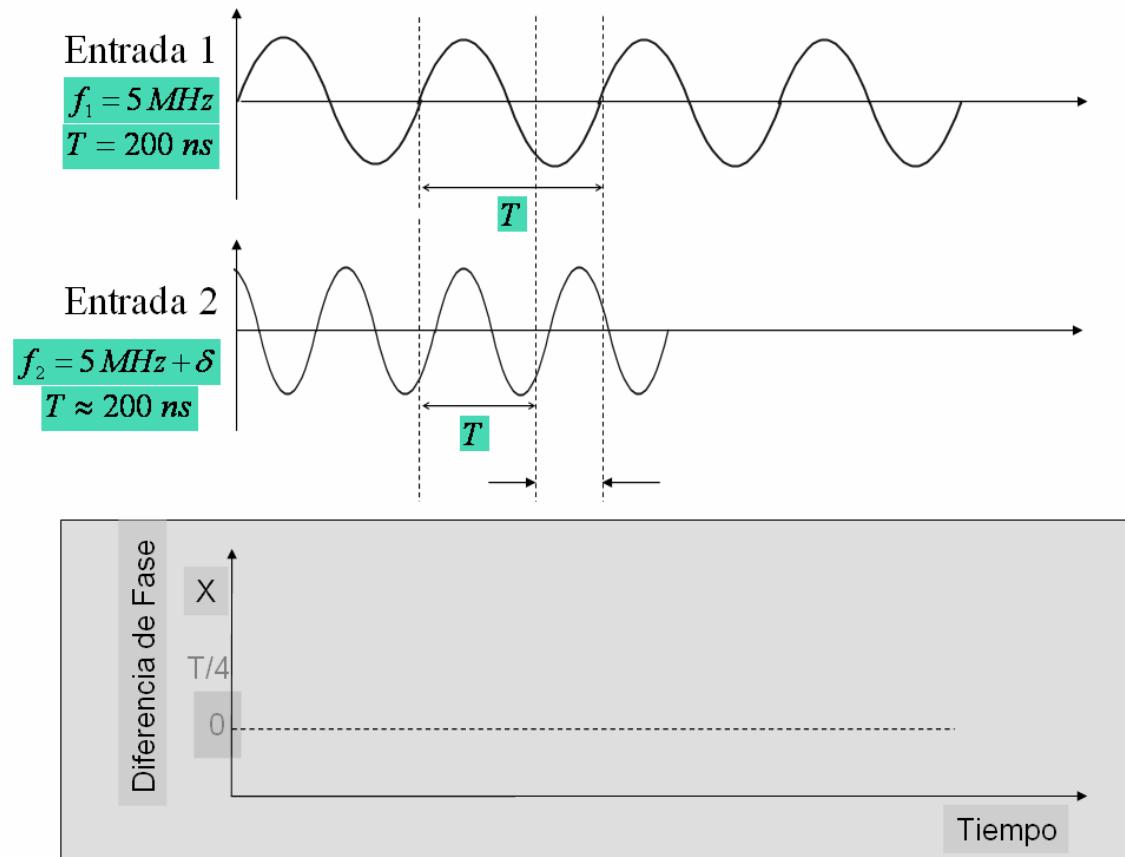
Caso ideal en el que la frecuencia bajo calibración es "perfecta"

Algunos ejemplos



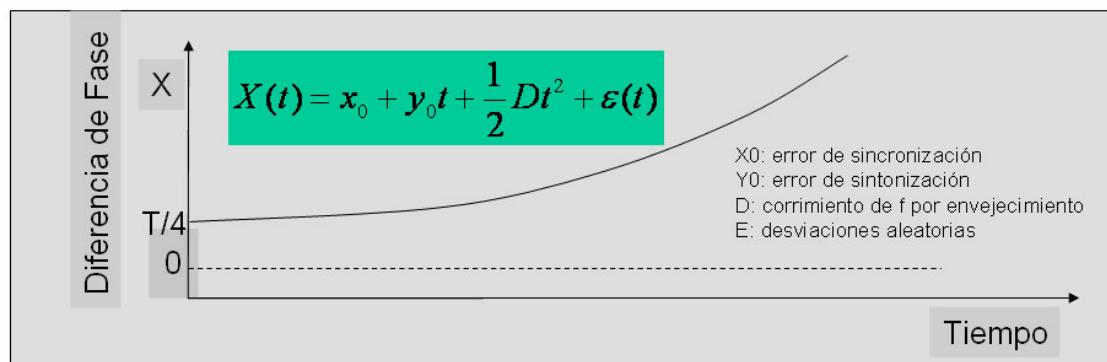
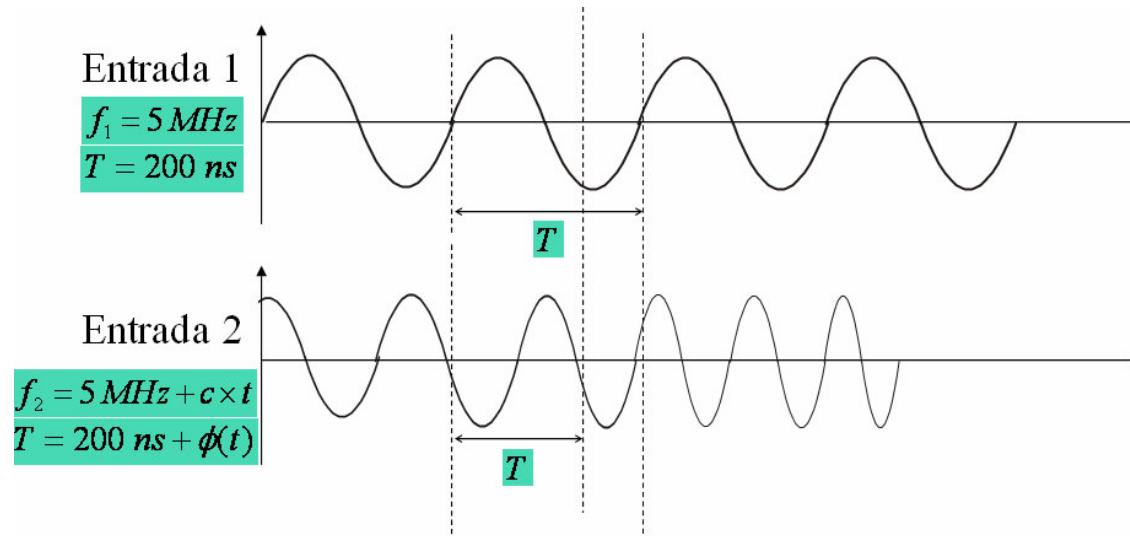
Caso ideal en el que la frecuencia bajo comparación es “perfecta”
pero con un error de sincronización.

Algunos ejemplos



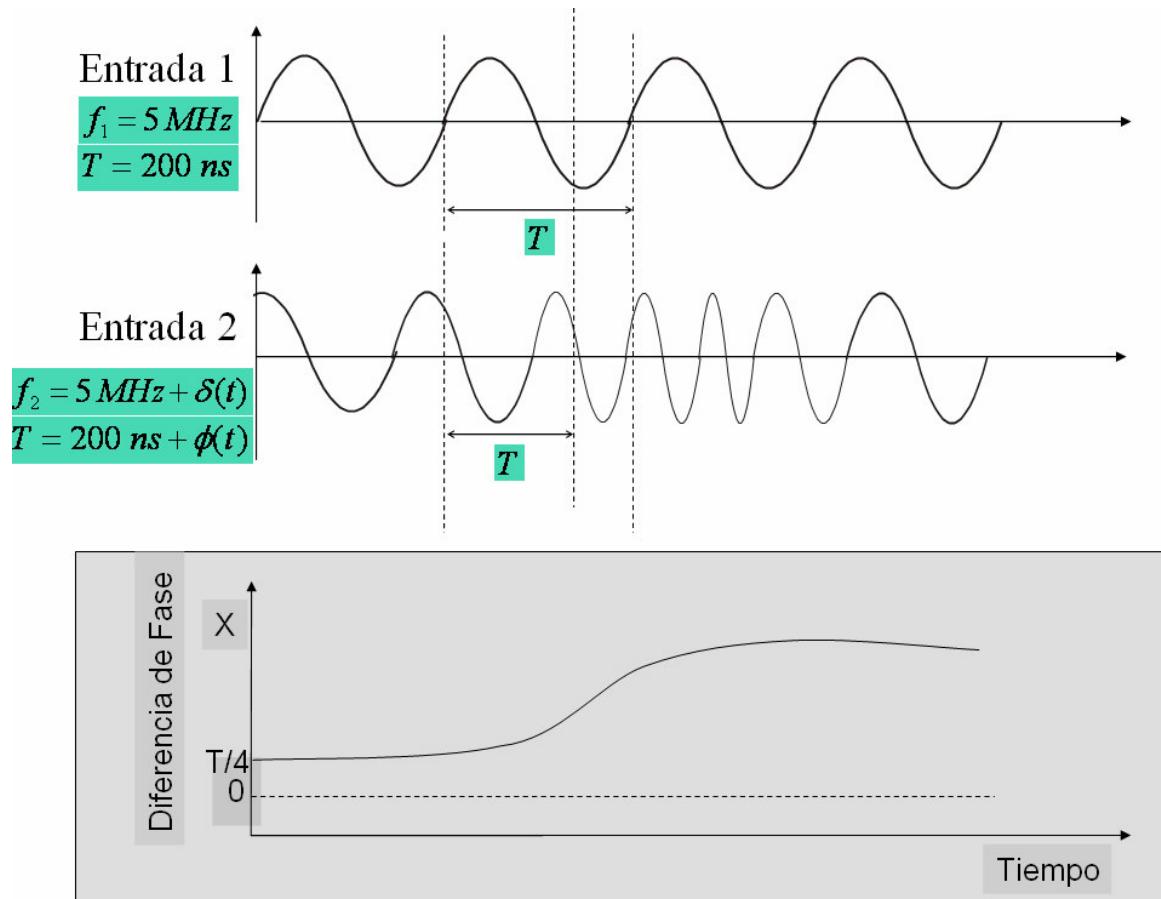
Caso ideal en el que la frecuencia bajo comparación es “perfecta” pero con un error de sincronización y sintonización.

Algunos ejemplos



Frecuencia bajo comparación con corrimiento lineal en el tiempo.

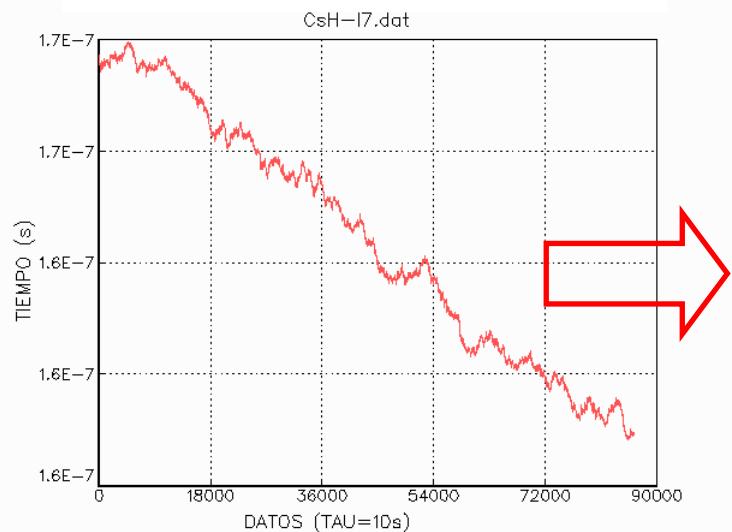
Algunos ejemplos



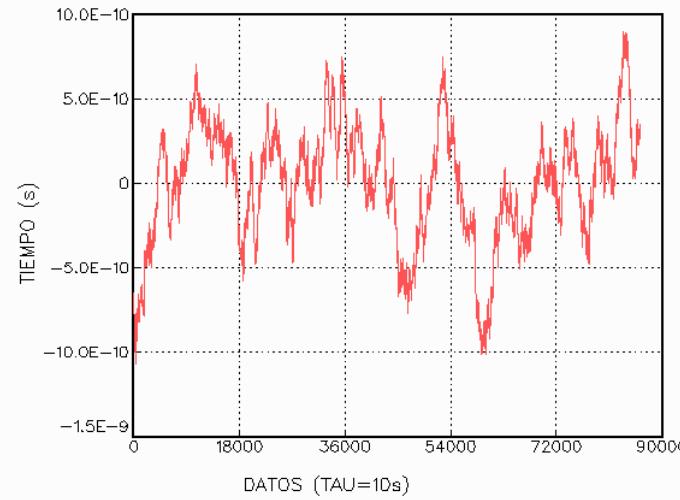
Frecuencia bajo comparación con ruido aleatorio.

Algunos ejemplos

Diferencia de fase entre dos osciladores (caso real)

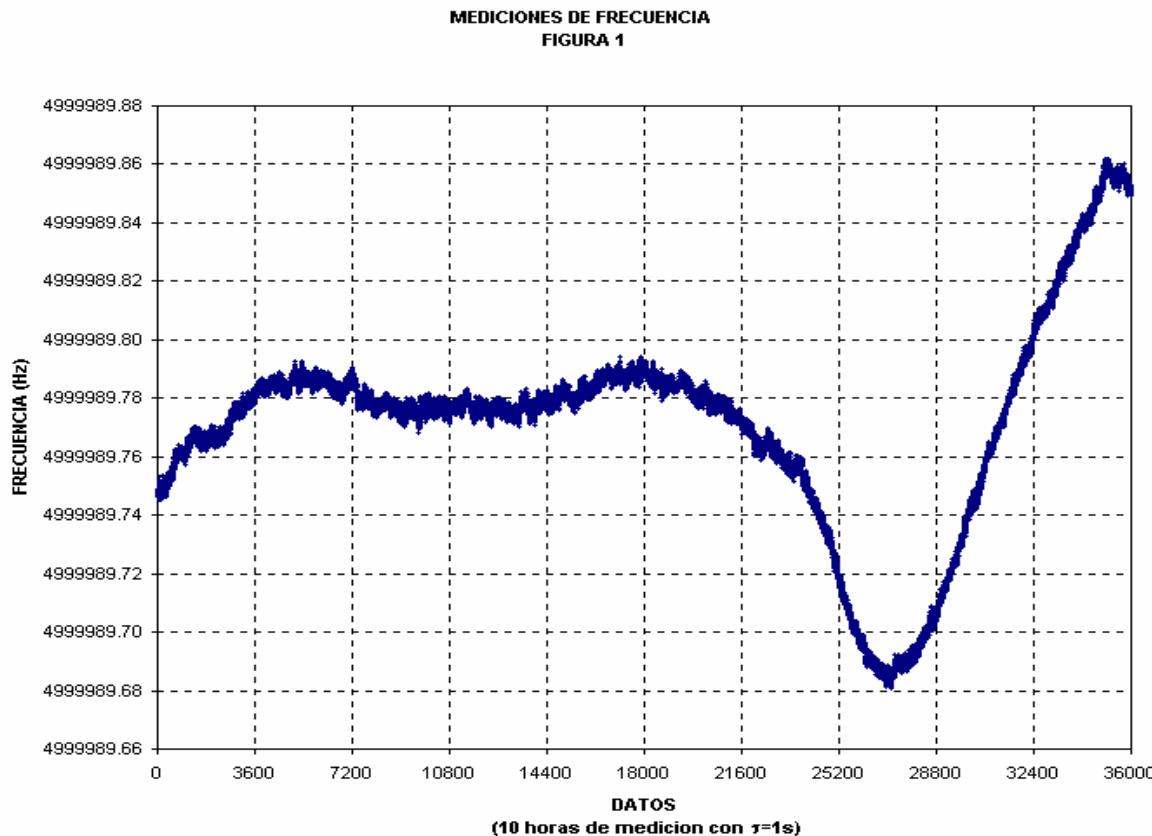


Diferencia de fase entre dos osciladores (error sistemático removido)



Diferencia de fase entre dos osciladores (caso real)

Algunos ejemplos

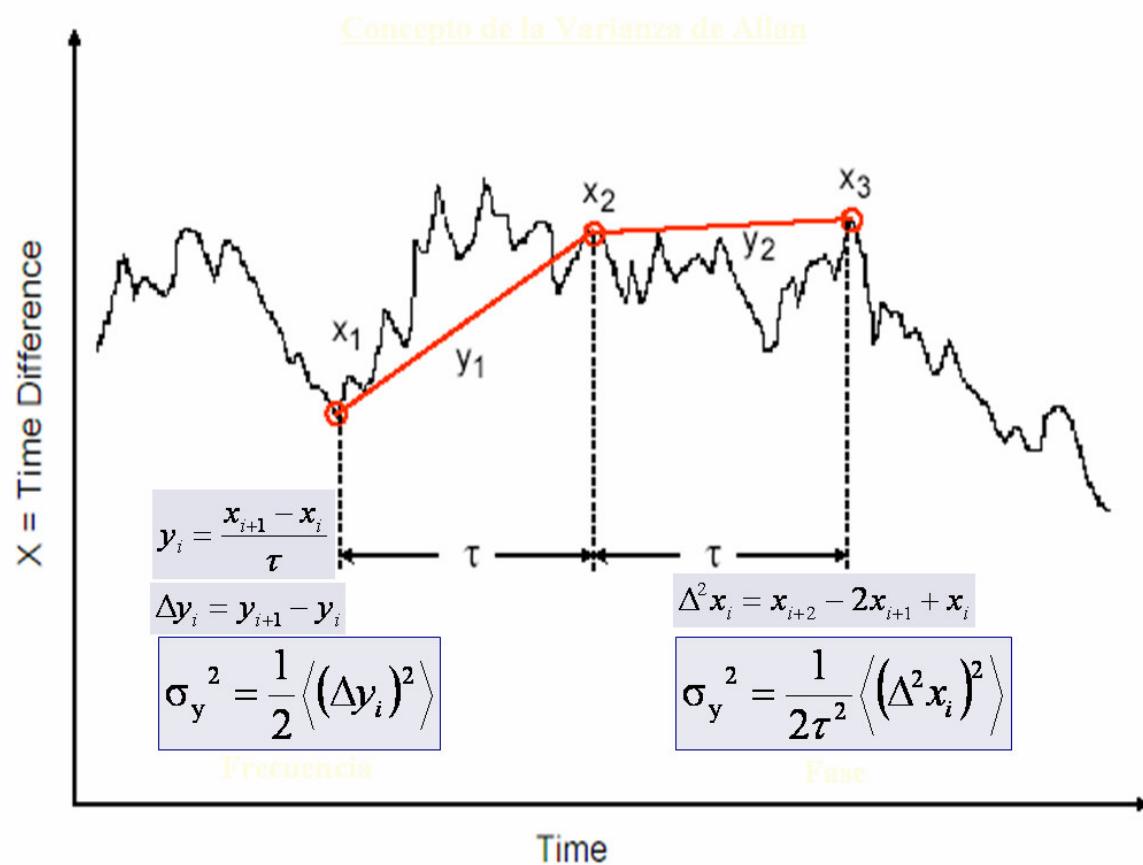


Frecuencia de un oscilador de cuarzo como función del tiempo (caso real)

Varianza de Allan

La Varianza de Allan es usada a nivel internacional como parte fundamental en el análisis de mediciones de tiempo y frecuencia. La varianza de Allan estima la dispersión de la frecuencia en función del tiempo de promediación, determinando así la estabilidad del oscilador bajo calibración.

Varianza de Allan



$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau_0(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)^2$$

donde:

σ_y^2 Varianza de Allan

N Número de datos espaciados τ_0

τ Tiempo de observación = $m\tau_0$

y_i i -ésima medición de fase

m = 2^n cálculos posibles

Expresión matemática para la estimación de la varianza de Allan. Las Y's representan mediciones de diferencias fraccionales de frecuencia, mientras que los subíndices indican el momento de medición. Como puede notarse, la varianza de Allan mide el grado de variación de la diferencia fraccional de frecuencia.

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2m)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2m} (x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i)^2$$

donde:

σ_y^2 **Varianza de Allan**

x_i *i-ésima medición de fase*

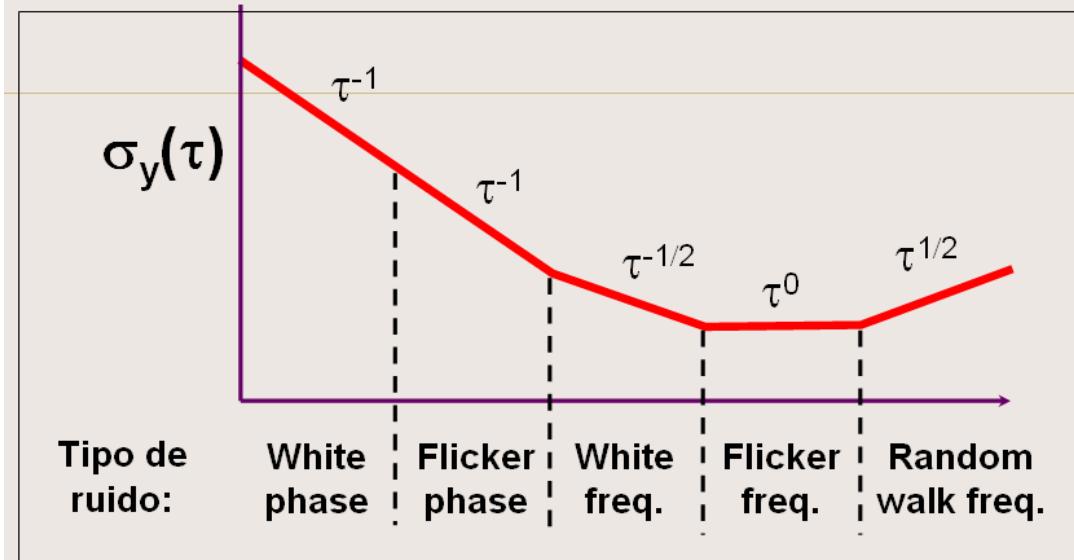
N **Número de datos espaciados τ_0**

τ **Tiempo de observación = $m\tau_0$**

m **= 2^n cálculos posibles**

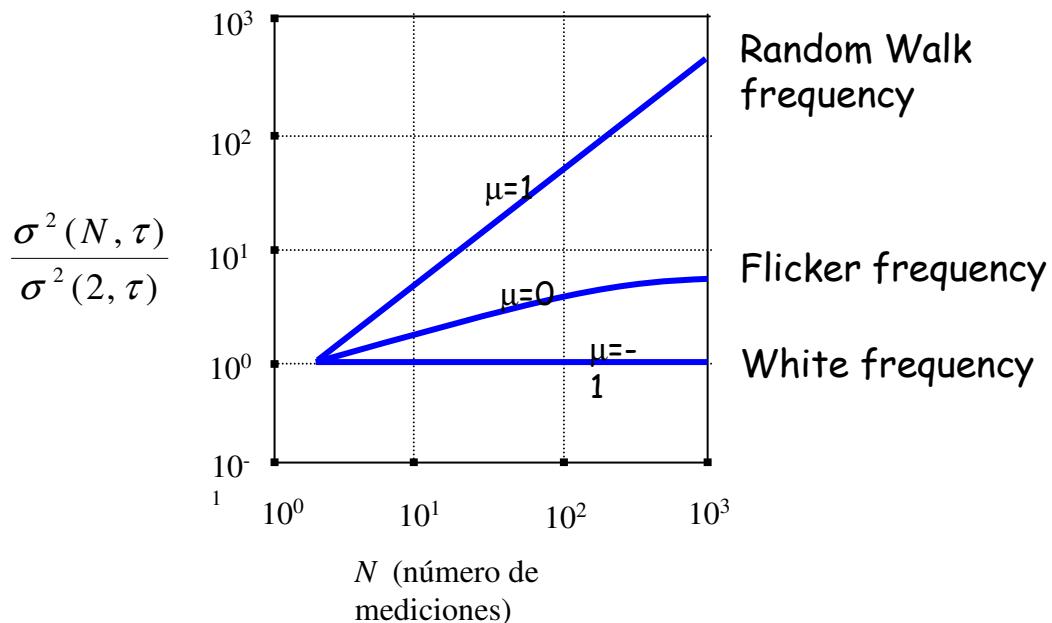
En ocasiones es más como expresar la varianza de Allan en términos de la diferencia de fase, x , entre dos osciladores. Los métodos de medición que aportan mayor información sobre el desempeño de osciladores se basan en la medición de diferencia de fase.

Dependencia temporal de $\sigma_y(\tau)$



Por debajo del ruido "flicker", los cristales de cuarzo típicamente tienen una dependencia τ^1 (white phase noise). Los patrones atómicos de frecuencia muestran una dependencia del tipo $\tau^{1/2}$ (white frequency noise) para tiempos de promediación cercanos al tiempo de ataque del lazo de amarre, y τ^1 para tiempos menores del tiempo de ataque. Tipicamente los τ 's para el ruido flicker son: 1 s para osciladores de cuarzo, 10^3 s para relojes de rubidio y 10^5 s para Cesio.

La dependencia de la desviación de Allan como función del tiempo de promediación constituye una de las formas más útiles, no solo para expresar el desempeño de un oscilador, sino para detectar posibles fallas en la operación del oscilador. Así mismo la dependencia de la desviación de Allan respecto al tiempo de promediación ofrece una herramienta muy útil en la detección de factores de influencia que degraden más de esperado el desempeño del oscilador.



Dependencia del cociente $\frac{\sigma^2(N, \tau)}{\sigma^2(2, \tau)}$ respecto al número de mediciones N . Donde $\sigma^2(N, \tau)$

representa la varianza estándar calculada para muestras separadas por un tiempo τ .

$\sigma^2(2, \tau)$ es la varianza de Allan calculada para tiempos de promediación τ

Interpretación estadística de la varianza de Allan en procesos de calibración

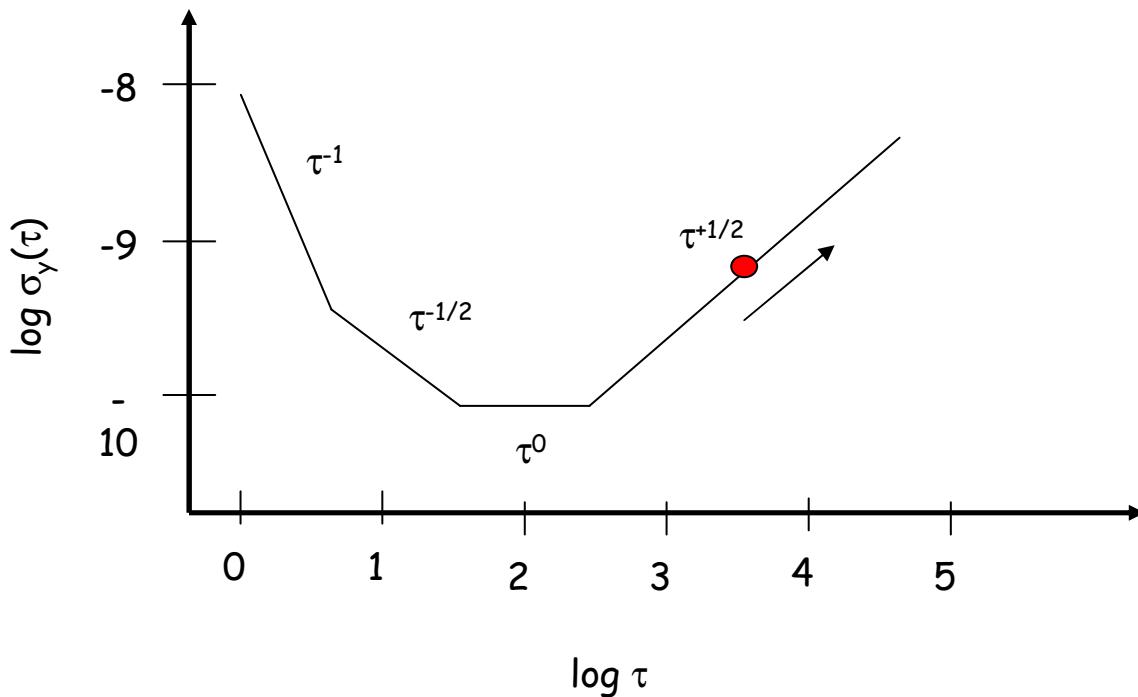
$$\sigma_y(\tau) \approx \frac{\langle f \rangle_\tau - f_0}{f_0} = \frac{\langle \Delta f \rangle_\tau}{f_0}$$

La desviación de Allan estimada para el tiempo de promediación τ ofrece una medida de cómo cambia la desviación fraccional de frecuencia para tiempos de promediación τ . Así por ejemplo, si para un oscilador la desviación de Allan es de 5 partes en 10^9 para una hora, esto es indicativo de que los promedios de las desviaciones fraccionales de frecuencia en una hora cambian al nivel de 5 partes en 10^9 .

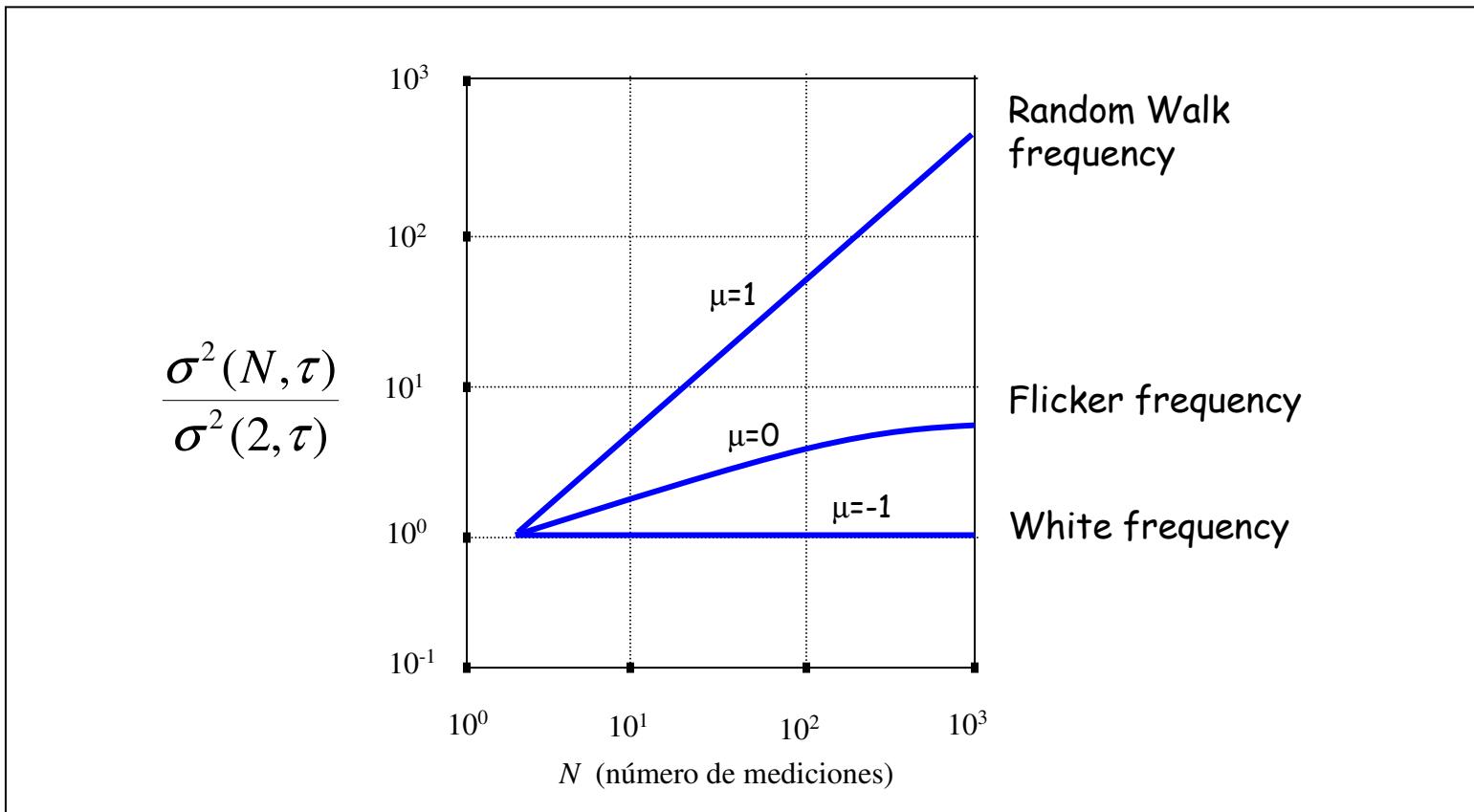
4. Uso de la varianza de Allan para expresar resultados de medición

Una caracterización completa del desempeño de un oscilador incluye resultados de estabilidad a corto, mediano y largo plazo. Se llama corto plazo a aquellos intervalos de tiempo donde la varianza de Allan decrece en la medida que el tiempo de promediación aumenta. Mediano plazo se refiere a los tiempos de promediación en los que la varianza de Allan se mantiene constante cuando el tiempo de promediación cambia. Largo plazo es aquel en donde la varianza de Allan aumenta de valor cuando el tiempo de promediación crece.

Estabilidad de frecuencia típica para un oscilador de cuarzo



En caso de contar con un sólo valor de estabilidad para un tiempo de promediación de una hora o mayor es posible estimar la estabilidad a tiempos mayores suponiendo un comportamiento típico para el oscilador en la región donde la presencia de ruido *Random Walk* es dominante



En la región donde el ruido *Random Walk* es dominante la estimación de la estabilidad de frecuencia por medio de la varianza estándar es mayor por un factor cercano a $N/2$, donde N es el número de mediciones, esto es:

$$\sigma(N, \tau) \approx \frac{N}{2} \sigma_y(\tau)$$

De esta manera, en la región donde el ruido *Random Walk* es dominante, la varianza estándar tiende a sobreestimar la inestabilidad en frecuencia proporcionalmente al número de mediciones realizadas.

Un ejemplo

El certificado de calibración de un equipo multifunción establece para la función de frecuencia los siguientes valores.

Frecuencia Nominal de la base de tiempo	Valor medido	Error relativo ±Incertidumbre (μ Hz/Hz)	Factor de cobertura
10 MHz	10,000 02 MHz	20 ± 1	2,5

En donde la incertidumbre ha sido evaluada usando la varianza estándar en base a 10 rondas de mediciones tomadas periódicamente cada 5 horas. Cada ronda de mediciones esta constituida a su vez por 10 mediciones las cuales presentan una dispersión pequeña comparada con la dispersión entre rondas.

Responder a la pregunta

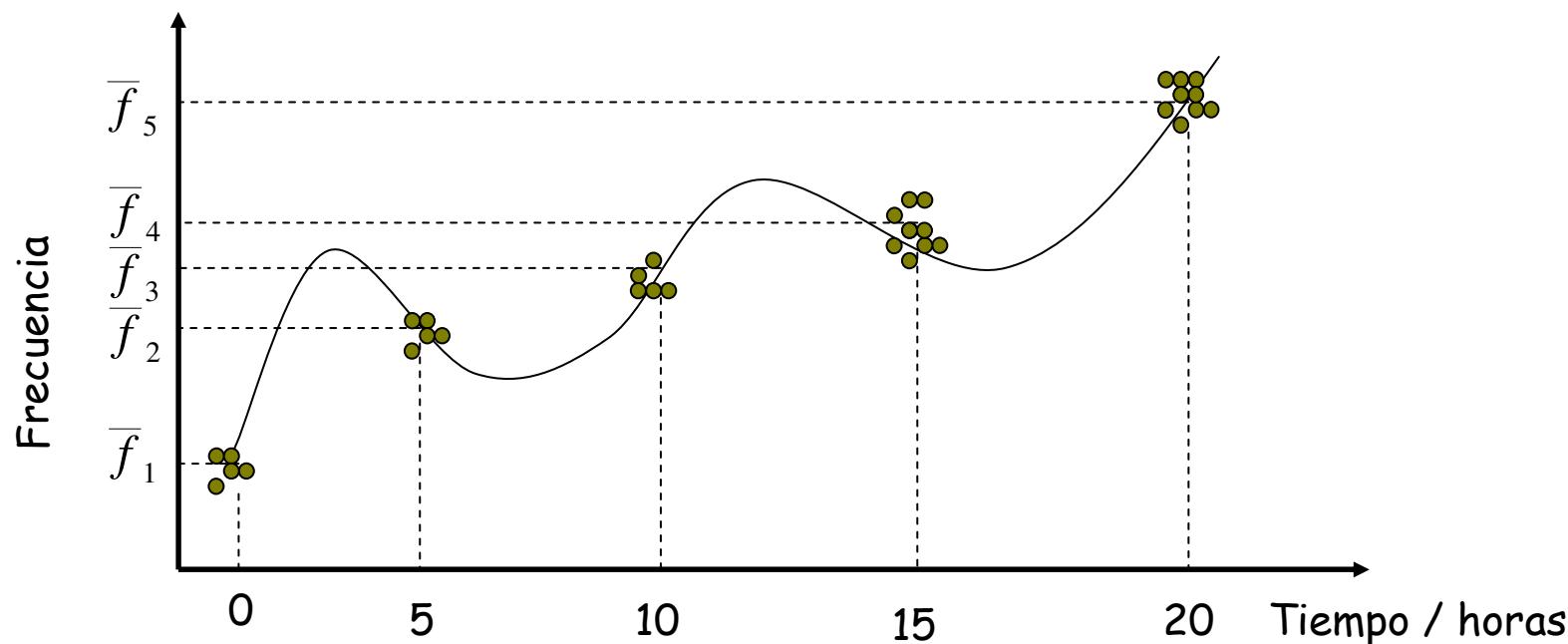
¿Qué incertidumbre en la frecuencia que genera el equipo multifunción seis meses después de ser calibrado?

Un ejemplo (continuación)

Evaluación de la estabilidad de frecuencia en términos de la varianza de Allan usando la relación

$$\sigma(N, \tau) \approx \frac{N}{2} \sigma_y(\tau)$$

Debido a que la dispersión en los valores de las mediciones que forman una ronda son muy pequeñas comparadas con la dispersión entre rondas, la incertidumbre en la calibración será tomada para $\tau = 5$ horas.



Un ejemplo (continuación)

La estimación de la estabilidad en frecuencia para tiempos de promediación de 5 horas se hace de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\sigma_y(\tau) \cong \frac{2}{N} \sigma(N, \tau).$$

En el ejemplo que nos ocupa, la incertidumbre relativa de acuerdo a los resultados de la calibración es de 1×10^{-6} . La estabilidad en frecuencia para el equipo multifunción, para tiempos de promediación de cinco horas, se estima en:

$$\sigma_y(\tau = 5 \text{ horas}) \cong 2 \times 10^{-7}$$

Si la base de tiempo del equipo multifunción se comporta como un oscilador de cuarzo típico, entonces se puede estimar la estabilidad de frecuencia a seis meses de acuerdo a la relación:

$$\sigma_y(\tau) \propto \tau^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_y(\tau_2)}{\sigma_y(\tau_1)} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_y(\tau_2) = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \sigma_y(\tau_1)$$

Debido a que $\tau_1 = 5 \text{ horas} = 1,8 \times 10^4 \text{ s}$ y que $\tau_2 = 6 \text{ meses} \cong 1,5 \times 10^7 \text{ s}$ entonces la estabilidad a seis meses será

$$\sigma_y(\tau = 6 \text{ meses}) \cong \sqrt{\frac{1,5 \times 10^7}{1,8 \times 10^4}} 2 \times 10^{-5} \cong (2,9 \times 10^1)(2 \times 10^{-7}) = 5,8 \times 10^{-6}$$

Un ejemplo (continuación)

De lo anterior se espera que, después de seis meses de la calibración, la frecuencia de la base de tiempo del equipo multifunción se haya corrido, en términos fraccionales, $5,8 \times 10^{-6}$. Debido a que se desconoce la dirección del corrimiento esta cantidad deberá considerarse como parte de la incertidumbre. Por lo que el valor de la frecuencia que genera el equipo multifunción será:

Frecuencia Nominal de la base de tiempo	Valor medido	Error relativo \pm Incertidumbre ($\mu\text{Hz}/\text{Hz}$)	Factor de cobertura
10 MHz	10,000 02 MHz	$20 \pm 5,8$	2,5

Nota. La incertidumbre indicada en esta tabla es estimada en términos de la varianza de Allan

Finalmente, se espera que las características de estabilidad en frecuencia del equipo multifunción no cambien de manera significativa al paso del tiempo. Si la base de tiempo del equipo en consideración se comporta de manera típica se espera entonces que la estabilidad en frecuencia seis meses después de la calibración, para tiempos de promediación de 5 horas, siga siendo de 2×10^{-7} .

5. Conclusiones

Conclusiones

1. La frecuencia debe, en términos generales, considerarse como un mensurando dependiente del tiempo.
2. La varianza de Allan es usada internacionalmente para estimar la estabilidad en frecuencia de osciladores. Aporta información mucho más rica en cuanto al desempeño de osciladores que la varianza estándar.
3. En la interpretación de los resultados de calibración de un oscilador de cuarzo es conveniente tener presente el desempeño típico de osciladores de cuarzo en términos de la varianza de Allan con el objeto de hacer las correcciones por "envejecimiento".
4. La varianza estándar subestima la inestabilidad de frecuencia para un oscilador en la región donde domina el ruido *Random Walk*. Dicha subestimación se hace por un factor $N/2$, donde N representa el número de mediciones utilizadas en la estimación de la varianza estándar.