

PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRE EN LA CONVERSIÓN DE ALGUNAS MAGNITUDES DE HUMEDAD

Jesús A. Dávila Pacheco, Enrique Martines López
Centro Nacional de Metrología, División de Termometría
km 4,5 Carretera a Los Cués, El Marquez, Qro., México
2110500 ext. 3395, 3420, jdavila@cenam.mx, emartine@cenam.mx

Resumen: En la actualidad algunos instrumentos usados para medir la humedad en gases (higrómetros) tienen la capacidad para mostrar, además de los valores medidos, otros valores que se calculan partir de los primeros. Por ejemplo, un higrómetro capacitivo usa una ecuación empírica de la humedad relativa como función de la capacitancia eléctrica; a partir del valor de humedad relativa mediante algoritmos programados en el instrumento, se calcula la temperatura de punto de rocío o la temperatura de bulbo húmedo. Según sea el caso, se debe conocer la temperatura y/o la presión ambiente para hacer la conversión.

La propagación de la incertidumbre entre estas magnitudes se obtiene a partir de las ecuaciones que los relacionan.

En este trabajo se describe la propagación de la incertidumbre de cuatro casos de valores calculados a partir de valores conocidos.

Palabras clave: humedad relativa, temperatura de punto de rocío, temperatura de bulbo húmedo, propagación de incertidumbre, conversión de magnitudes.

1. INTRODUCCIÓN

El contenido de agua en una muestra de gas se puede expresar en términos de varias magnitudes, entre las que se encuentran la humedad relativa, la temperatura de punto de rocío y la temperatura de bulbo húmedo. Por ejemplo, en la tabla 1 se presentan los valores equivalentes para una muestra de gas.

Tabla 1. Contenido de humedad de una muestra de gas a una temperatura de 23 °C y una presión de 101325 Pa.

Magnitud	Valor	Unidad
Humedad relativa	45,0	%HR
Temperatura de punto de rocío	10,4	°C
Temperatura de bulbo húmedo	15,6	°C

Cada una de las magnitudes de humedad de la tabla 1 se puede medir con instrumentos diferentes, por ejemplo el valor de humedad relativa se obtiene con un higrómetro capacitivo, la temperatura de punto de rocío con un medidor de espejo frío y la temperatura de bulbo húmedo con un psicrómetro aspirado.

El valor de humedad relativa indicado por un higrómetro capacitivo se obtiene con una ecuación

empírica que relaciona la capacitancia eléctrica de un sensor al experimentar cambios en el contenido de agua.

Un medidor de espejo frío mide la temperatura de condensación del agua de una muestra de aire, la cual se enfría isobáricamente. El valor de temperatura se relaciona con el contenido de agua en la muestra.

Un psicrómetro aspirado consta de dos termómetros, uno se encuentra cubierto con un algodón humedecido con agua (bulbo húmedo) y el otro (bulbo seco) mide la temperatura ambiente. Cuando se hace circular una muestra de aire en ambos termómetros, el bulbo húmedo experimenta un enfriamiento debido a la evaporación del agua en la cubierta de algodón [1], la diferencia de temperatura de ambos termómetros está relacionada con la humedad de la muestra de aire. La temperatura indicada por el termómetro de bulbo seco permanece igual a la temperatura ambiente y constante durante la operación del psicrómetro, en consecuencia, se usa la literal t para denotar el valor de la temperatura ambiente y bulbo seco.

Algunos instrumentos han incorporado opciones para mostrar valores de otras magnitudes calculadas a partir de valores obtenidos de una magnitud dada. Por ejemplo, algunos higrómetros capacitivos no sólo muestran valores de humedad

relativa, sino también valores de temperatura de punto de rocío y temperatura de bulbo húmedo, entre otras.

Para asociar un valor de incertidumbre a los valores calculados que despliegan algunos medidores de humedad, es necesario diferenciar entre el valor medido y el valor calculado y propagar la incertidumbre del primero al segundo.

La propagación de la incertidumbre de los valores calculados se obtiene con la relación matemática entre las magnitudes. La propagación se realiza de acuerdo a la guía para la expresión de incertidumbres [2].

En este trabajo se describe la propagación de la incertidumbre para cuatro casos en los que se relacionan la humedad relativa, la temperatura de punto de rocío y la temperatura de bulbo húmedo.

2. FUNDAMENTOS

La humedad relativa y la temperatura de punto de rocío se relacionan por.

$$HR \approx \frac{e(t_d)}{e(t)}, \quad (1)$$

Donde $e(t)$ es la presión de vapor de agua una temperatura t ; t_d es la temperatura de punto de rocío; t es la temperatura ambiente.

Una aproximación para calcular la presión de vapor de agua es [3].

$$\ln e(T) = \sum_{i=1}^6 g_i T^{i-2} + g_7 \cdot \ln T, \quad (2)$$

$e(T)$ está dado en Pascal Pa y T en kelvin K. Los coeficientes se presentan en la tabla 2

Tabla 2. Coeficientes de la aproximación de Sonntag ecuación (2) para el cálculo de la presión de vapor de agua.

Coeficiente	Valor	Unidades
g_1	$-6,0969385 \times 10^3$	$\text{Pa} \cdot \text{K}^{-1}$
g_2	21,2409642	Pa
g_3	$-2,711193 \times 10^{-2}$	$\text{Pa} \cdot \text{K}$
g_4	$1,673952 \times 10^{-5}$	$\text{Pa} \cdot \text{K}^2$

g_5	0	$\text{Pa} \cdot \text{K}^3$
g_6	0	$\text{Pa} \cdot \text{K}^4$
g_7	2,433502	$\text{Pa} \cdot \text{K}^{-1}$

En un psicrómetro aspirado el cálculo de la humedad relativa se realiza a partir de mediciones de temperatura de bulbo húmedo (t_w) y bulbo seco (t) y está dada por la ecuación (3), conocida como la aproximación de Ferrel [1].

$$HR \approx \frac{e(t_w) - A \cdot P \cdot (t - t_w)}{e(t)} \quad (3)$$

Donde A es constante ($6,6 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$); P es presión atmosférica; $e(t_w)$ es la presión de vapor de agua a t_w ; $e(t)$ es la presión de vapor de agua temperatura ambiente t .

En psicrómetros el termómetro de bulbo seco mide la temperatura ambiente.

3. CONVERSIÓN ENTRE MAGNITUDES DE HUMEDAD

En la figura 1 se presentan los cuatro casos de conversiones entre HR , t_d y t_w que se analiza en este trabajo.

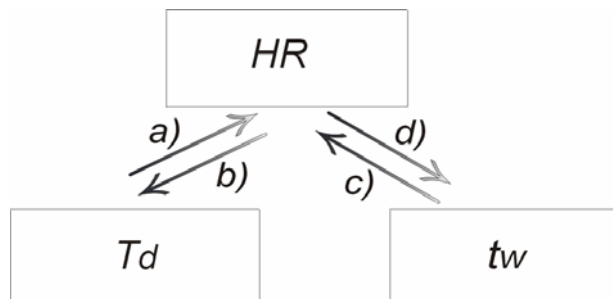


Fig. 1. Esquema de conversiones entre HR , t_d y t_w .

Caso a) Cálculo de HR a partir de t_d

Para calcular el valor de HR a partir de valores medidos de t_d se usa la ecuación (1), la cual relaciona ambas magnitudes. En este caso se requiere conocer el valor de la temperatura ambiente t .

En la figura 2 se muestran curvas típicas del comportamiento entre t_d y HR calculados a diferentes valores de $t=23 \text{ } ^\circ\text{C}$ y $P=81 \text{ kPa}$.

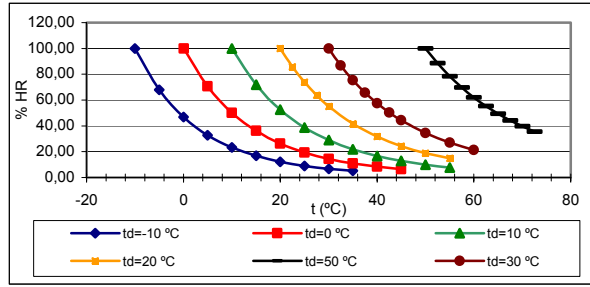


Fig. 2 Valores calculados de HR para distintos valores de t_d .

Caso b) Cálculo de t_d a partir de HR

Para calcular el valor de t_d a partir de HR se usa la ecuación (1) que relaciona ambas magnitudes. Debido a que no es posible despejar el valor de t_d directamente, se requiere solucionar la ecuación $F_2=0$ para t_d , donde

$$F_2 = e(t_d) - HR \cdot e(t). \quad (4)$$

Caso c) Cálculo de HR a partir de t_w

El valor de HR a partir de t_w se puede obtener con la ecuación (3). En este caso se requiere conocer además los valores de la temperatura y presión ambiente.

Caso d) Cálculo de t_w a partir de HR

El valor de t_w se puede calcular de la ecuación (3). De manera similar a b), el valor de t_w no se puede despejar directamente de (3), por esta razón se requiere solucionar la ecuación $F_4=0$ para t_w donde

$$F_4 = e(t_w) - A \cdot P \cdot (t - t_w) - HR \cdot e(t). \quad (5)$$

La solución a F_2 y F_4 se puede obtener numéricamente con el método de Newton [4].

4. PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRE

La propagación de incertidumbres para magnitudes no correlacionadas está dada por:

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right]^2} \quad (6)$$

Esta ecuación se conoce como Ley de propagación de incertidumbres [2].

La incertidumbre combinada relativa está dada por:

$$u_{crel}(y) = \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2}. \quad (7)$$

Esta ecuación se aplica para modelos multiplicativos con magnitudes no correlacionadas.

En este trabajo la incertidumbre combinada de una magnitud y se denota como u_y .

4.1 Propagación de u_{HR} a partir de t_d y u_{t_d}

La propagación de la incertidumbre a HR debida a la incertidumbre de t_d y t se obtiene con la ecuación

$$u_{HR} = HR \cdot \sqrt{\left(\frac{ue(t_d)}{e(t_d)} \right)^2 + \left(\frac{ue(t)}{e(t)} \right)^2}, \quad (8)$$

donde

$$ue(t_d) = \frac{de(t_d)}{dt_d} \cdot ut_d, \quad (9)$$

$$ue(t) = \frac{de(t)}{dt} \cdot ut. \quad (10)$$

En este caso t y t_d no están correlacionados debido a que el contenido de agua en una muestra de aire es independiente de la temperatura de la muestra, t_d sólo tiene dependencia de la presión parcial de vapor de agua y de la presión. Además en la práctica, la medición de la temperatura de punto de rocío y la temperatura de la muestra se realiza con termómetros diferentes.

4.2 Propagación de u_{t_d} a partir de HR y u_{HR}

De la ecuación (1) se tiene que:

$$e(t_d) \approx HR \cdot e(t). \quad (11)$$

La incertidumbre $ue(t_d)$ se obtiene al aplicar la ecuación (6) a la ecuación (11):

$$ue(t_d) = e(t_d) \cdot \sqrt{\left(\frac{u_{HR}}{HR} \right)^2 + \left(\frac{ue(t)}{e(t)} \right)^2}. \quad (12)$$

Finalmente de la ecuación (9), la incertidumbre ut_d se puede escribir como:

$$ut_d = ue(t_d) \cdot \left(\frac{de(t_d)}{dt_d} \right)^{-1}, \quad (13)$$

Donde $ue(t_d)$ está dada por la ec. (12).

4.3 Propagación de uHR a partir de t_w y ut_w

Del numerador de la ecuación (3) se define

$$h(t_w) = e(t_w) - A \cdot P \cdot (t - t_w), \quad (14)$$

y se sustituye en (3), entonces HR se escribe como (15):

$$HR = \frac{h(t_w)}{e(t)}. \quad (15)$$

Nuevamente, de esta ecuación y de la ec. (6), se obtiene

$$u(HR) = HR \cdot \sqrt{\left(\frac{uh(t_w)}{h(t_w)} \right)^2 + \left(\frac{ue(t)}{e(t)} \right)^2}, \quad (16)$$

donde

$$uh(t_w) = \sqrt{\left(\frac{\partial e(t_w)}{\partial t_w} + A \cdot P \right)^2 u^2 t_w + \left(\frac{\partial h(t_w)}{\partial A} \cdot uA \right)^2 + \left(\frac{\partial h(t_w)}{\partial P} \cdot uP \right)^2 + \left(\frac{\partial h(t_w)}{\partial t} \cdot ut \right)^2}. \quad (17)$$

No existe correlación entre t y t_w porque físicamente la mezcla de aire con vapor de agua a presión constante tiene un grado de libertad; es decir para un valor dado de presión parcial de vapor de agua se puede mantener en una fase para un infinito conjunto de valores de temperatura. En cambio al estar en equilibrio dos fases (vapor y líquido), el sistema no tiene grados de libertad y tanto como la presión de vapor de agua y t_w tienen valores definidos.

La incertidumbre uA se obtiene de valores publicados [1] y resulta ser $\pm 2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ($k=1$).

La incertidumbre en P se obtiene de los resultados experimentales del medidor de presión y de su informe de calibración.

4.4 Propagación de incertidumbre de t_w a partir de mediciones de HR y uHR

De acuerdo a la ec. (1), (3) y (14) se tiene que $e(t_d)$ es igual a $h(t_w)$. Al escribir la ec. (9) en términos de $h(t_w)$, la incertidumbre en t_w se obtiene al despejar ut_w de la siguiente ecuación

$$uh(t_w) = \left(\frac{dh(t_w)}{dt_w} \right) \cdot ut_w. \quad (18)$$

De (15) se tiene que

$$h(t_w) = HR \cdot e(t). \quad (19)$$

Al aplicar (7) a (19) se tiene que

$$\left(\frac{uh(t_w)}{h(t_w)} \right)^2 = \left(\frac{uHR}{HR} \right)^2 + \left(\frac{ue(t)}{e(t)} \right)^2, \quad (20)$$

y de (14) se tiene que:

$$\frac{dh(t_w)}{dt_w} = \frac{de(t)}{dt_w} + A \cdot P. \quad (21)$$

Al sustituir en la ecuación (18) las ecuaciones (20) y (21) se obtiene que la incertidumbre para ut_w está dada por:

$$ut_w = \frac{e(t) \cdot HR}{de(t)/dt_w + A \cdot P} \cdot \sqrt{\frac{ue(t)^2}{e(t)^2} + \frac{u(HR)^2}{HR^2}}. \quad (22)$$

5. RESULTADOS

Se obtuvieron los modelos analíticos para el cálculo de la incertidumbre propagada para los cuatro casos descritos en la sección 4. A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación. En todos ellos la incertidumbre calculada es para un factor de cobertura $k=2$.

5.1 Incertidumbre propagada a HR a partir de valores de t_d

Se realizaron cálculos para distintos valores de t_d y t . Los valores de incertidumbre se calcularon con la ecuación (11). La tabla 3 muestra un caso para valores de t_d desde $-10 \text{ } ^\circ\text{C}$ hasta $25 \text{ } ^\circ\text{C}$ y $ut_d=0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Tabla 3. Valores de %HR y uHR calculados a partir de mediciones de t_d y t , con $t=25\text{ °C}$, $ut = 0,1\text{ °C}$.

Valores medidos	Valores calculados	
$t_d\text{ (°C)}$	%HR	u%HR
-10	9,04	$\pm 0,27$
-5	13,31	$\pm 0,38$
0,1	19,42	$\pm 0,55$
5	27,53	$\pm 0,76$
10	38,7	$\pm 1,0$
15	53,8	$\pm 1,4$
20	73,8	$\pm 1,9$
25	100,0	$\pm 2,5$

En la tabla 3 se observa que para un medidor de temperatura de punto de rocío con incertidumbre $ut_d = 0,3\text{ °C}$ y un termómetro con incertidumbre $ut = 0,1\text{ °C}$, se obtienen incertidumbres en humedad relativa desde 0,3 % hasta 2,5 %.

5.2 Propagación de ut_d a partir de medición de HR

El cálculo de t_d y ut_d se realizó con la ec. (14) en el intervalo de 10 % a 95 % de humedad relativa y en temperatura en el intervalo de 10 °C a 40 °C . En la tabla 4 se presentan los resultados cuando $t = 22\text{ °C}$.

Tabla 4. Valores de t_d y ut_d calculados a partir de mediciones de %HR, t y P con $u\%HR = 0,8\%$, $ut = 0,1\text{ °C}$ y $uP = 200\text{ Pa}$.

Valores medidos	Valores calculados	
%HR	$t_d\text{ (°C)}$	$ut_d\text{ (°C)}$
10	-11,01	$\pm 1,01$
20	-1,97	$\pm 0,55$
30	3,65	$\pm 0,39$
40	7,80	$\pm 0,31$
50	11,11	$\pm 0,26$
60	13,89	$\pm 0,23$
70	16,28	$\pm 0,20$
80	18,39	$\pm 0,19$
90	20,28	$\pm 0,17$

Un ejemplo en el que se pueden aplicar estos resultados es en higrómetros capacitivos que cuentan con la opción de indicar la temperatura de punto de rocío. En este caso, las incertidumbres que se pueden obtener son menores a $\pm 0,55\text{ °C}$ en el intervalo de -2 °C a 20 °C . Una fuente de incertidumbre no considerada en nuestro análisis,

es el modelo para el cálculo de t_d , por lo que se recomienda validar ese cálculo.

5.3 Propagación de incertidumbre uHR a partir de medición de t_w

Los valores calculados de HR en la tabla 5 se obtuvieron para un intervalo de 10 °C a 25 °C en temperatura de bulbo húmedo $t=25\text{ °C}$ y $P=81\text{ kPa}$. Estos valores se obtienen generalmente en un psicrómetro aspirado. En este ejemplo se consideró que la incertidumbre de los termómetros involucrados es de $0,1\text{ °C}$ en ambos casos. La incertidumbre uHR se calculó con la ec. (17 y 18).

Tabla 5. Valores de %HR calculados a partir de mediciones de t_w y t , con $ut = 0,1\text{ °C}$, $ut_w=0,1\text{ °C}$ y $uP = 200\text{ Pa}$.

Valores medidos	Valores calculados	
$t_w\text{ (°C)}$	%HR	u%HR
10	13,1	$\pm 1,8$
13	26,7	$\pm 1,6$
16	41,9	$\pm 1,6$
19	59,0	$\pm 1,6$
22	78,3	$\pm 1,8$
25	100,0	$\pm 2,0$

5.4 Propagación de incertidumbre de valores calculados de t_w a partir de medición de %HR

La tabla 6 muestra los valores calculados de t_w y ut_w con las condiciones: $P=81\text{ kPa}$, $t = 22\text{ °C}$.

Tabla 6. Valores de t_w calculados a partir de mediciones de HR, t y P . Los valores de incertidumbre utilizados son $uHR=1\%$, $ut = 0,1\text{ °C}$ y $uP = 200\text{ Pa}$.

Valores medidos	Valores calculados	
%HR	$t_w\text{ (°C)}$	$ut_w\text{ (°C)}$
10	7,58	$\pm 0,42$
20	9,63	$\pm 0,4$
30	11,54	$\pm 0,38$
40	13,32	$\pm 0,36$
50	14,99	$\pm 0,34$
60	16,55	$\pm 0,32$
70	18,03	$\pm 0,32$
80	19,42	$\pm 0,3$
90	20,75	$\pm 0,3$

Los valores de incertidumbre de la tabla 6 se calcularon con la ec. (23) en las condiciones

descritas en la misma tabla. Para estos cálculos se requiere conocer la temperatura y presión atmosférica de la muestra, así como sus incertidumbres correspondientes.

6. CONCLUSIONES

Se obtuvieron las ecuaciones para propagar la incertidumbre a valores de humedad calculados a partir de valores conocidos. Se presentaron cuatro casos que relacionan a la humedad relativa, la temperatura de punto de rocío y la temperatura de bulbo húmedo. En estas ecuaciones se incluyó la incertidumbre de otras magnitudes involucradas como son la temperatura ambiente y la presión atmosférica.

Adicionalmente se realizó la evaluación numérica de las ecuaciones obtenidas en los intervalos de mayor interés para los casos mencionados.

Las ecuaciones obtenidas se pueden usar en higrómetros que cuentan con opción para indicar además del valor medido, valores de otras magnitudes calculadas a partir de ellos, por ejemplo en higrómetros capacitivos, medidores de punto de rocío y psicrómetros. Sin embargo, los valores calculados por esos instrumentos requieren validación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las observaciones y comentarios realizados por los árbitros, así como al Dr. Edgar Méndez L. y al Dr. Leonel Lira C. integrantes de la División de Termometría (CENAM) por su acertada revisión.

REFERENCIAS

- [1] ASTM E 337-84(reapproved 1996), Measuring Humidity with a Psychrometer (the measurement of Wet-and Dry-Bulb Temperatures, ASTM standards, 1996, pp.655-677.
- [2] ISO GUM, "Guide to expression of the uncertainty in Measurement". BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML, 1993.
- [3] Sonntag D., "The history of formulation and measurements of saturation water vapour

pressure". Third International Symposium of Humidity and Moisture; 1, 1998, pp.93-102.

- [4] J. Mathews, "Numerical methods for mathematics, science, and engineering". Prentice Hall; 1992, 2nd edition.