

DETERMINACION DE LA INCERTIDUMBRE DE LOS PARAMETROS INTRINSECOS DEL MODELO DE UNA CAMARA

Pablo Vera y Joaquín Salas

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del IPN
José Siurob No. 10, Col. Alameda, C.P. 76040, Querétaro, Qro.
Tel. 442-212-11-11, salas@ieee.org

Resumen: En este estudio se presenta un modelo para obtener la incertidumbre de los parámetros intrínsecos de una cámara de video. Primeramente, se presenta el problema y se ilustra su importancia en el marco de las mediciones mediante el análisis de imágenes. En el cálculo de los parámetros intrínsecos se utiliza el modelo de Zhang[1]. Enseguida, se define el modelo de cálculo de incertidumbre. Se presenta evidencia experimental para el caso de la longitud focal.

1. INTRODUCCIÓN

En el marco de los sistemas de visión por computadora, la calibración se refiere al establecimiento del modelo de la cámara. El problema es importante pues la determinación de los parámetros del funcionamiento de la cámara permite resolver una gran cantidad de problemas entre los que destacan el mapeo de puntos de la escena en la imagen, la determinación de medidas en un sistema de referencia global y otros. Para su mejor estudio, los parámetros de la cámara se dividen en intrínsecos y extrínsecos[2]. Los parámetros intrínsecos relacionan las medidas en el sistema de referencia de la escena(en milímetros) con la posición de puntos en la imagen expresados en píxeles. Los parámetros extrínsecos relacionan los sistemas de referencia de la escena y la cámara.

Existen una gran cantidad de métodos de calibración. Tsai[3] utiliza un patrón que plano sobre el que se ha impreso una figura conocida. En otros se aprovechan las características naturales de la escena y los efectos por proyección perspectiva[4]. Beyer[5] por su parte se realiza una calibración en la que se utiliza un patrón tridimensional. Las imágenes son tomadas con dos cámaras colocando el patrón en una posición y después trasladándolo sobre un eje definido previamente sobre una plataforma de precisión. Otros métodos de calibración incluyen[6] y [7]. En el primero, Hartley pone de manifiesto que el mínimo número de correspondencias para encontrar los parámetros de la cámara son ocho. En el segundo, Zhao *et al.* utilizan la escena y efectos de perspectiva para encontrar los parámetros de la cámara. En todos ellos se obtienen los parámetros del funcionamiento de la cámara. Sin embargo, hasta donde sabemos, el problema de la determinación de la calidad del valor de los parámetros no ha sido estudiado con la

importancia que el tema merece. Por ejemplo, una forma tradicional de establecer la calidad de la calibración consiste en la retroproyección de puntos en la imagen a puntos en el mundo[8]. La medida de calidad de los parámetros consiste en determinar la distancia media entre los puntos considerados. Uno de los métodos más populares para calibrar una cámara es el propuesto por Zhang[1]. En su método, un patrón del tipo de un tablero de ajedrez es colocado en diversas posiciones no coplanares. A partir de las correspondencias de las esquinas se formula un sistema lineal que al resolverse por mínimos cuadrados permite obtener de forma óptima los parámetros buscados. El propósito de este estudio es complementar el trabajo de Zhang introduciendo el cálculo de la incertidumbre en la determinación de los parámetros intrínsecos del modelo de la cámara. En la sección 2 ilustramos el problema de la calibración. En seguida, en la sección 3 presentamos la formulación de Zhang aumentada con los elementos para el cálculo de la incertidumbre en la sección 4. En seguida, en la sección 5 presentamos resultados experimentales. Finalmente, discutimos el avance logrado y plateamos perspectivas futuras.

2. MODELO DE LA CAMARA

Como ya se mencionó, los parámetros de una cámara se pueden clasificar en extrínsecos e intrínsecos. Los primeros representan la transformación geométrica que relaciona el sistema de referencia de la cámara con el del mundo. Esta transformación está compuesta por un vector de traslación y una matriz de rotación.

En la Fig. 1 se muestra como un punto puede representarse en los sistemas de referencia del

mundo y de la cámara como p^w y p^c respectivamente. Los sistemas de referencia se relacionan por una traslación t^w y una rotación R_w^c . La matriz de rotación tiene tres variables independientes dadas por la rotación con respecto a cada uno de los ejes principales. Así pues, la relación entre los sistemas de referencia está dada por

$$p^c = R_w^c(p^w - t^w). \quad (1)$$

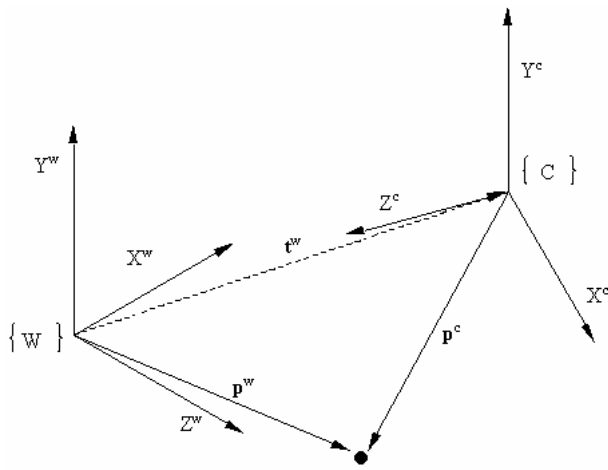


Fig. 1. Relación entre los sistemas de referencia de la cámara y el mundo. El punto se representa por los vectores p^w y p^c en los sistemas de referencia del mundo y de la cámara, respectivamente. El vector t^w y una rotación R_w^c describe la posición de un sistema con respecto al otro.

En una gran cantidad de aplicaciones, la relación entre la cámara y la escena permanece fija. Por ello, nuestro interés se centra en obtener la incertidumbre en los parámetros intrínsecos. Los parámetros intrínsecos están principalmente relacionados con características ópticas de la lente de la cámara y características digitales de la imagen. Entre estas características se encuentra la longitud focal, la cuadratura de los píxeles, el centro de la imagen y la distorsión radial[2]. La longitud focal f es la distancia que existe entre el lente de la cámara y el centro óptico del sistema. Dado un punto en el espacio $p^w = (x, y, z)^T$, y su proyección en un punto de la imagen $p^c = (x_c, y_c)$. Dada la longitud focal f de la

lente, las relaciones que se establecen entre ambos puntos, por efecto de perspectiva, están dadas por

$$x_c = fx/z, \quad y_c = fy/z, \quad (2)$$

La cuadratura de los píxeles es la relación horizontal contra vertical de los píxeles en la imagen. Estas distancias están dadas en *mm*. La distancia entre los píxeles del CCD en la dirección horizontal es s_x y en la vertical es s_y . Es posible tener una gran cantidad de definiciones de lo que es el centro de la imagen[9]. Sin embargo, dentro de nuestro problema, consideraremos el centro de proyección como coincidente con el centro numérico de la matriz que representa la imagen. Un efecto de las lentes que puede influir en la imagen resultante es la distorsión radial. Esta distorsión puede apreciarse mejor en las partes externas de una imagen, ya que crece radialmente desde el centro hacia la periferia. La Fig. 2 muestra el efecto de sobreponer una retícula a una imagen con distorsión radial. Este efecto es despreciable cuando se utiliza óptica de buena calidad, la distancia focal es grande y los objetos bajo inspección se encuentran cerca del centro de la imagen. En nuestro estudio asumimos que la distorsión radial es despreciable.

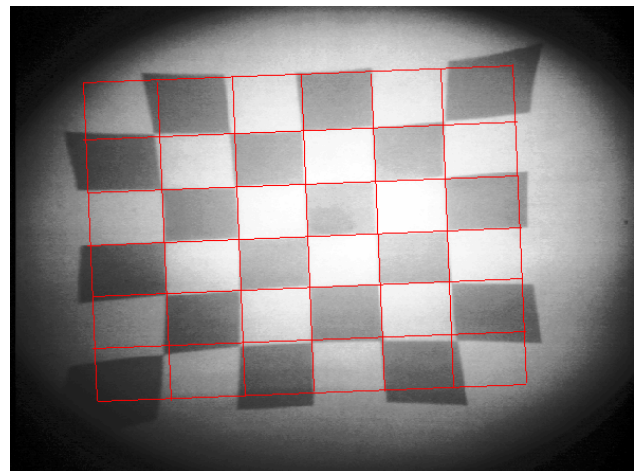


Fig. 2. Distorsión radial. Comparación de la posición de los puntos en una imagen. La imagen aparece claramente distorsionada si se compara con la cuadrícula de color que representa los puntos de la misma imagen sin distorsión radial.

Así, dado un punto $p^c = (x_c, y_c, f)$ en el sistema de referencia de la cámara, su proyección en píxeles está dada por

$$\begin{aligned} -(x_{im} - o_x)s_x &= fx_c / z_c, \\ -(y_{im} - o_y)s_y &= fy_c / z_c. \end{aligned} \quad (3)$$

3. PARAMETROS INTRINSECOS

Como se ha expresado, Zhang[1] desarrolló un método de calibración basado en un patrón del tipo tablero de ajedrez, como el que observa en la Fig. 2. En este caso, las esquinas son utilizadas como las referencias del patrón. Sean los puntos del patrón, definidas en el sistema de referencia del mundo, $M = (x, y, 1)^T$. Note como se asume que el plano sobre el cual está el patrón está en $z = 0$. Por otro lado, los puntos en la imagen corresponden a $m = (u, v)^T$. Definiendo a la matriz A como la matriz de los parámetros intrínsecos como:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

donde $\alpha = -f / s_x$ y $\beta = -f / s_y$, (u_0, v_0) son las coordenadas del centro de la imagen, y γ describe la oblicuidad de los ejes de la imagen. De acuerdo a lo planteado en el modelo de la cámara la relación que existe entre los puntos m y M es:

$$sm = HM, \quad (5)$$

donde H es la homografía que mapea los puntos en el mundo en píxeles de la imagen y s es un factor de escala. Uno de los conceptos más importantes en calibración de cámaras es la cónica absoluta. En este concepto se plantea que un círculo en el mundo es proyectado en el mismo círculo en la imagen, independientemente de la rotación y traslación de la cámara. De la cónica absoluta se desprenden restricciones muy importantes que relacionan la homografía con los parámetros intrínsecos. Estas restricciones son[10]

$$\begin{aligned} h_1^T A^{-T} A^{-1} h_2 &= 0, \\ h_1^T A^{-T} A^{-1} h_1 &= h_2^T A^{-T} A^{-1} h_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Las expresiones en Ec. (6) son básicas para obtener los parámetros intrínsecos. Sea A^{-1} dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{-\gamma}{\alpha\beta} & \frac{w_0 - u_0\beta}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{1}{\beta} & \frac{-v_0}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Podemos definir $B = A^{-T} A^{-1}$ como una matriz simétrica dada por

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & \frac{-\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{w_0 - u_0\beta}{\alpha^2\beta} \\ \frac{-\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\beta^2} & \frac{-\gamma(w_0 - u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{w_0 - u_0\beta}{\alpha^2\beta} & \frac{-\gamma(w_0 - u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} & \left(\frac{w_0 - u_0\beta}{\alpha\beta}\right)^2 + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

La solución a las expresiones en Ec. (6) Zhang rearrregla las expresiones en base a las seis incógnitas de la matriz B . Luego, arma un producto punto entre estas incógnitas y las restricciones que brinda la propiedad de la cónica absoluta. Finalmente, se puede hacer las restricciones son conjuntadas en un sistema lineal homogéneo. La solución, como es bien sabido, se puede obtener como el eigenvector asociado al valor singular más pequeño[11]. Una vez calculados los valores de B , es posible obtener los valores de los parámetros intrínsecos como

$$\begin{aligned} v_0 &= (B_{12}B_{12} - B_{11}B_{23}) / (B_{11}B_{22} - B_{12}^2), \\ \alpha &= 1 / \sqrt{B_{11}}, \\ \beta &= \sqrt{B_{11}} / (B_{11}B_{22} - B_{12}^2), \\ \gamma &= -B_{12}\alpha^2\beta, \\ u_0 &= v_0 / \alpha - B_{13}\alpha^2. \end{aligned} \quad (9)$$

4. CALCULO DE LA INCERTIDUMBRE

Una vez conocidos los valores de los parámetros intrínsecos es necesario determinar su nivel de incertidumbre para reflejarla en los procesos de medición posteriores. Las principales fuentes de incertidumbre al calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos son:

- la incertidumbre del patrón, y
- la repetibilidad de las lecturas

La incertidumbre del patrón influye en la incertidumbre de cada parámetro por un factor llamado coeficiente de sensibilidad. El coeficiente de sensibilidad c_i para el parámetro i se puede obtener de dos maneras diferentes. La primera es analítica a partir de la relación funcional entre el valor del parámetro y la magnitud x_p del patrón que se toma en cuenta en el cálculo del parámetro. El coeficiente de sensibilidad está dado por:

$$c_i = \frac{\partial f(x_p)}{\partial x_p} \tag{10}$$

La segunda manera de obtener c_i es numérica a partir del cambio ΔY producido en el valor del parámetro debido a un cambio pequeño Δx_p que se considere en la magnitud del patrón que se toma en cuenta en el cálculo del parámetro. En este caso el coeficiente de sensibilidad está dado por:

$$c_i = \frac{\Delta Y}{\Delta x_p} \tag{11}$$

La incertidumbre $\mu_r(y_i)$ del parámetro i debida a la repetibilidad de las lecturas se determina usando el Método de Evaluación Tipo A[12] basado en un análisis estadístico de una serie de mediciones. Al medir varias veces un parámetro bajo condiciones de repetibilidad se tiene una dispersión de los resultados la cual se expresa por su desviación estándar σ_i . La incertidumbre estándar $\mu_r(y_i)$ está dada por la desviación estándar experimental de la media:

$$\mu_r(y_i) = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

donde n es el número de lecturas del parámetro i . La incertidumbre combinada $\mu_c(y_i)$ del parámetro i en nuestro caso está dada por:

$$\mu_c(y_i) = \sqrt{\mu_r^2(y_i) + [c_i \mu(x_p)]^2} \tag{13}$$

en donde $\mu(x_p)$ es la incertidumbre estándar del valor estimado de la magnitud del patrón que interviene en el cálculo del parámetro. Para determinar la incertidumbre en las mediciones que

se realicen con el sistema se tiene una incertidumbre $\mu(x_s)$ del sistema considerando que éste mide en las mismas unidades asociadas al patrón de calibración (en este caso en milímetros).

Para calcular $\mu(x_s)$ a partir de la incertidumbre de cada parámetro nuevamente se consideran los coeficientes de sensibilidad, en este caso del sistema con respecto a cada parámetro i , dados por c_{si} . La incertidumbre combinada está dada por:

$$\mu_c(y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (c_{si} \mu_c(y_i))^2} \tag{14}$$

Para N parámetros se multiplica la incertidumbre combinado por un factor de cobertura k para obtener la incertidumbre expandida:

$$U(x_s) = k \mu(x_s) \tag{15}$$

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La determinación de los parámetros intrínsecos se efectuó a partir de once imágenes del patrón de tablero de ajedrez. En nuestro caso, consideramos que la oblicuidad de los ejes es despreciable. Es decir, que los ejes son ortogonales entre ellos. Por otro lado, consideramos que la distorsión radial es despreciable. Finalmente asumimos que el centro de proyección se localiza en el centro numérico de la imagen. Bajo estas condiciones se calcularon la posición de las esquinas de los puntos, utilizando las rutinas de software del *Image Processing Library* y el *Open Source Computer Vision Library* de Intel[13]. Con los puntos de las esquinas del patrón y sus respectivas proyecciones en la imagen se cálculo la homografía. Con la homografía se formó el sistema lineal expresado en la Ec. (6). Finalmente, con la solución para los valores de B se obtuvieron los valores de los parámetros intrínsecos de acuerdo con las expresiones en la Ec. (9). Para α y β se obtuvieron respectivamente los valores de media y desviación estándar de (533.52, 159.20) y (589.55, 296.35) respectivamente. Considerando que la dispersión en los resultados es grande, comparándola con otras fuentes de incertidumbre, éstas se pueden despreciar y se puede calcular la incertidumbre de los parámetros intrínsecos usando el Método de Evaluación Tipo A que se describió anteriormente y que está basado en el análisis

estadístico de las mediciones. De esta manera se tiene que la incertidumbre estándar de los parámetros intrínsecos es:

$$\mu(\alpha) = \sigma_{\alpha} / \sqrt{n} = 159,20 / \sqrt{11} = 48,00, \quad (16)$$

$$\mu(\beta) = \sigma_{\beta} / \sqrt{n} = 296,35 / \sqrt{11} = 89,35,$$

donde $n=11$ es el número de lecturas.

5. CONCLUSION

En este documento, se presentó una formulación para la obtención de la incertidumbre en el cálculo de los parámetros intrínsecos del modelo de una cámara. Los resultados son importantes en cuanto a que nos permiten determinar la calidad de los resultados que son utilizados en procesos ulteriores y eventualmente ayudan a determinar la incertidumbre en la expresión de un proceso de medición. El modelo que se ha presentado ayuda a determinar cuando una de las imágenes utilizadas para la obtención de los parámetros está mal condicionada o los puntos de las esquinas no fueron extraídos con precisión. La formulación se mostró para un caso restringido donde varios parámetros son conocidos o se consideraron despreciables. Actualmente, nos encontramos en el proceso de incorporar estos parámetros al proceso de determinación de su incertidumbre. De igual interés, resulta en algunas aplicaciones la obtención de la incertidumbre de los parámetros extrínsecos.

REFERENCIAS

- [1] Z. Zhang. A New Flexible Technique for Camera Calibration. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(11):1330-1334, 2000.
- [2] E. Trucco y A. Verri. Introductory Techniques for 3-D Computer Vision. Prentice Hall, 1998.
- [3] Y. Tsai. A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3-D Machine Vision Metrology using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses. IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3(4):323-344, 1987.
- [4] Q. T. Luong y O. D. Faugeras. Self-Calibration of a Camera using Multiple Images. ICPR, A:9-12, 1994.
- [5] A. Beyer. Calibration of CCD-Cameras for Machine Vision and Robotics. Reporte Técnico, Swiss Federal Institute of Technology(ETH), 1987.
- [6] I. Hartley. In Defense of the Eight-Point Algorithm. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Vision, 19(6), 1997.
- [7] T. Zhao, F. Lv, and R. Nevatia. Self-Calibration of a Camera from Video of a Walking Man. Reporte Técnico, Institute for Robotics and Intelligence Systems, 2002.
- [8] O. Faugeras. Three-Dimensional Computer Vision}. The MIT Press, 1993.
- [9] G. Wilson y A. Shaffer. What is the Center of the Image? Reporte Técnico, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1993.
- [10] Kenichi Kanatani. Geometric Computation for Machine Vision. Oxford Science Publications, 1993.
- [11] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. Matrix Computations. The John Hopkins University Press, 1989.
- [12] W. Schimid y R. Lazos. Guía para Estimar la Incertidumbre de la Medición. Reporte Técnico, Centro Nacional de Metrología, 2000.
- [13] Intel. Open source computer vision library. En <http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>, Marzo 2004.