

LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN EN EL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

Enrique Villa Diharce

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Jalisco s/n, Mineral de Valenciana, Guanajuato, Gto. CP. 36240

Tel.: (473) 732 7155 ext. 49652, Fax: (473) 732 5749, e-mail: villadi@cimat.mx

Resumen: Una forma de evaluar el desempeño de un proceso consiste en comparar su variabilidad con los límites de especificación establecidos para el proceso. Para cuantificar la variabilidad del proceso, medimos la característica de interés, y calculamos su desviación estándar. Esta medida de variabilidad se ve incrementada por la incertidumbre del proceso de medición utilizado. La magnitud de la incertidumbre de medición es proporcional a la probabilidad de clasificar erróneamente las unidades generadas por el proceso, como dentro o fuera de especificaciones. Esta relación se muestra en dos ejemplos que ilustran el impacto de la incertidumbre de medición en el control estadístico del proceso.

1. INTRODUCCIÓN

Para cuantificar la variabilidad de un proceso, tenemos que medir la característica de interés en las piezas generadas por el proceso, y evaluar una medida de variabilidad, como por ejemplo, la desviación estándar. Cuando utilizamos un sistema de medición para cuantificar la capacidad de un proceso, obtenemos información donde están mezcladas la variabilidad del proceso y la repetibilidad o variabilidad del sistema de medición. Para separar estas variabilidades se diseñan y aplican experimentos en donde la variabilidad introducida por el operador y la debida a las piezas intervienen como efectos aleatorios que se separan mediante un análisis de varianza. Este tipo de estudios se conocen como estudios R&R [1].

El monitoreo de un proceso industrial, descansa en un sistema de medición que establece la conexión entre los componentes que genera el proceso y el técnico que evalúa su desempeño. Así, el desempeño del sistema de medición debe estar de acuerdo con la capacidad del proceso que estudiamos.

Las iniciativas de calidad mas recientes, como lo son, Calidad total [2] y Seis sigma [3], establecen que la toma de decisiones debe basarse en datos y no en suposiciones, y que para esto es imprescindible medir las características que son relevantes para el cliente. Así, en la gran mayoría de los proyectos seis sigma [4], la etapa inicial consiste en elaborar un estudio de variabilidad R&R

del sistema de medición que se utiliza, para saber si este es adecuado.

Cuando tomamos la decisión de clasificar las unidades generadas por un proceso, como dentro o fuera de especificaciones, de acuerdo a una lectura que nos proporciona un sistema de medición, tenemos una probabilidad de error en la clasificación, proporcional a la magnitud de la incertidumbre de medición. Los errores en la clasificación pueden originar una pérdida para el fabricante, cuando unidades conformes a la especificación se declaran como no conformes, o una pérdida para el cliente cuando este recibe unidades no conformes como si fueran conformes [5, 6, 7, 8].

En la sección dos discutimos la evaluación de la capacidad de medición y su relación con la variabilidad del proceso monitoreado. En la sección tres discutimos la cuantificación de los errores que podemos cometer al clasificar las unidades de acuerdo a límites de especificación dados, con un sistema de medición cuya incertidumbre es conocida. Se presentan además dos ejemplos en donde se muestran dos procesos que se monitorean con dos sistemas de medición de calidad diferente.

2. CAPACIDAD DE MEDICIÓN

Tenemos que un sistema de medición es adecuado si el error de medición es menor que la variación del

proceso. La finalidad de un estudio R&R es verificar que el proceso de medición está en control estadístico, y además, estimar la capacidad del sistema de medición.

Los conceptos centrales en los estudios R&R son la reproducibilidad y la repetibilidad. Se dice que un sistema de medición es repetible, si las mediciones que se realizan varias veces a una misma pieza son aproximadamente iguales. Un sistema de medición es reproducible si este tiende a dar los mismos resultados a pesar de cambiar alguna variable de influencia.

Para estudiar la variabilidad de un sistema de medición, cuando hay varios operadores que miden con un mismo instrumento las piezas que genera un proceso, podemos seguir un modelo de análisis de varianza, en donde la respuesta es la medición y los factores son, las piezas y los operadores.

Para hacer un estudio R&R de un instrumento de medición se lleva a cabo un experimento balanceado, con dos factores: piezas y operadores. Se toman K mediciones y_{ijk} ($k=1, 2, 3, \dots, K$), por el operador j a la pieza i , $i=1, 2, \dots, I$, $j=1, 2, \dots, J$.

Tenemos un modelo de efectos aleatorios, cuando los I operadores son una muestra aleatoria de la población de operadores que usan el instrumento de medición. En este caso el modelo de medición es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad (1)$$

donde μ es una constante desconocida y los efectos α_i (de piezas), β_j (de operadores), $\alpha\beta_{ij}$ (de interacción entre piezas y operadores) y el término de error ε_{ijk} , se consideran variables aleatorias centradas en cero, esto es, $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta^2)$, $\alpha\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$ y $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$. Además los efectos y el término de error se consideran independientes. Cuando tenemos un modelo de medición como el anterior, estimamos sus parámetros μ , σ^2 , σ_α^2 , σ_β^2 y $\sigma_{\alpha\beta}^2$, por medio de un análisis de varianza, o algún otro método [9].

Interpretamos la variabilidad del instrumento de medición como su repetibilidad, mientras que la variabilidad debida al operador, como la

reproducibilidad. Estas métricas se definen a partir de las estimaciones de las varianzas del instrumento y del efecto operador de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_{repet} = \hat{\sigma}, \text{ (repetibilidad) y}$$

$$\hat{\sigma}_{repro} = \sqrt{\hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2}, \text{ (reproducibilidad).}$$

Como la variabilidad del sistema de medición tiene dos componentes que son el instrumento de medición y el operador del instrumento, entonces la variabilidad del sistema de medición esta dada por,

$$\hat{\sigma}_{R\&R} = \sqrt{\hat{\sigma}_{repet}^2 + \hat{\sigma}_{repro}^2}.$$

La variabilidad de las piezas, es una componente que no está incluida en la repetibilidad del sistema de medición, sino que expresa la variabilidad del proceso de fabricación. La estimación de esta variabilidad es,

$$\hat{\sigma}_{piezas}^2 = \hat{\sigma}_\alpha^2.$$

Una medida de la calidad del instrumento de medición para nuestro proceso es el cociente de la repetibilidad del instrumento de medición respecto de la variabilidad del proceso

$$\delta = \hat{\sigma}_{piezas}^2 / \hat{\sigma}_{R\&R}^2. \quad (2)$$

Cuando tenemos límites de especificación del proceso de medición, (LEI, LES) , podemos comparar la precisión del sistema de medición con el intervalo de especificación o tolerancia. Una métrica que hace esta comparación es el cociente repetibilidad - tolerancia, dado por la expresión

$$P/T = k\hat{\sigma}_{R\&R} / (LES - LEI). \quad (3)$$

Algunas veces se toma $k = 5.15$, que representa el rango de la normal estándar que comprende una probabilidad de 99%, mientras que otras veces se toma $k = 6$, que corresponde a una probabilidad de 99.73%. Esta métrica se expresa algunas veces como porcentaje.

Para entender el impacto que la incertidumbre de medición tiene sobre la estimación de la capacidad del proceso, consideremos un proceso centrado y

con una capacidad Cpk igual a uno. Para un proceso centrado, se define el índice de capacidad Cpk como el cociente $(LES - LEI) / 6\hat{\sigma}_o$, donde $\hat{\sigma}_o$ es la dispersión observada en la medición de las partes. Esta dispersión tiene dos componentes, la variabilidad de las piezas y la del sistema de medición. Si cuantificamos la incertidumbre de medición por el índice de precisión relativa (3), entonces se puede probar que la capacidad de proceso estimada depende del índice P/T de acuerdo a la función

$$Cpk = 1 / \sqrt{1 + (P/T)^2}.$$

Esto significa que la capacidad del proceso, se subestima, debido a que la variabilidad observada en las mediciones es una sobreestimación de la variabilidad de las partes, debida a la incertidumbre del sistema de medición.

Ejemplo 1. En un estudio de capacidad de medición de un instrumento, se hicieron tres mediciones a dos piezas de parte de cinco operadores elegidos aleatoriamente. En la Tabla 1 se muestran las mediciones obtenidas.

En la Tabla 2 tenemos los resultados del análisis de la varianza para los datos, en donde podemos apreciar las sumas de cuadrados (**S.C.**), los grados de libertad (**G.L.**) y los cuadrados medios (**C.M.**) para las diferentes fuentes de error, como lo son, las piezas, los operadores y su interacción.

Operador					
Pieza	Op. 1	Op. 2	Op. 3	Op. 4	Op. 5
1	3.481	3.448	3.485	3.475	3.472
	3.477	3.472	3.464	3.472	3.470
	3.470	3.470	3.477	3.473	3.474
2	3.258	3.254	3.256	3.249	3.241
	3.254	3.247	3.257	3.238	3.250
	3.258	3.239	3.245	3.240	3.254

Tabla 1. Valores de medición de 2 piezas por parte de 5 operadores elegidos al azar.

En la Tabla 3 tenemos las medidas de variabilidad del estudio R&R, como son repetibilidad, reproducibilidad, variabilidad del instrumento, y además, dos cocientes que nos indican la magnitud de la variabilidad del instrumento de medición y del proceso. En este caso tenemos un instrumento de

medición adecuado para monitorear el proceso, ya que hemos encontrado que la variabilidad del proceso (piezas) es casi veinte veces mayor que la variabilidad del instrumento de medición.

Fuente	S.C.	G.L.	C.M.
Partes	.3738600	1	.3738600
Operadores	.0006145	4	.0001536
PartesxOper.	.0001331	4	.0000333
Error	.0009453	20	.0000473
Total	.3755530	29	

Tabla 2. Análisis de Varianza para los datos del Ejemplo 1, considerando como aleatorios los efectos de pieza y operador.

Cantidad	Estim. (EE)	Lim.Inf.	Lim.Sup
σ	.00687(.00109)	.00256	.00993
σ_{repro}	.00392(.00244)	.00000	.01430
$\sigma_{R\&R}$	.00792(.00133)	.000643	.01599
σ_{Piezas}	.15785(.11165)	.07036	5.02350
$\sigma^2 / \sigma_{R\&R}^2$	.75431(.25257)	.0000	1.0000
$\sigma_{Piezas} / \sigma_{R\&R}$	19.94(14.50)	4.47	587.2

Tabla 3. Estimaciones y error estándar (EE=error estándar) de índices y razones de diferentes componentes de variabilidad para los datos del Ejemplo 1.

En la columna de las estimaciones de la Tabla 3, tenemos que la reproducibilidad σ_{repro} es aproximadamente el 50% de la variabilidad del sistema de medición $\sigma_{R\&R}$. Esto indica que podemos reducir la variabilidad del sistema, reduciendo la variabilidad del efecto operador, lo cual puede lograrse con un entrenamiento de los operadores, orientado a uniformizar el manejo del instrumento de medición por parte de los operadores.

3. ANÁLISIS DE RIESGOS

Cuando una unidad se encuentra dentro de los límites de especificación decimos que es una unidad conforme y en caso contrario, decimos que es una unidad no conforme. La clasificación de una unidad se hace después de medir la característica de interés. Debido a la incertidumbre del instrumento de medición, es posible que se cometa alguno de los dos siguientes errores: Clasificar como no

conforme a una unidad que es conforme y declarar como conforme a una unidad que realmente no es conforme. Las probabilidades condicionales de estos posibles errores se conocen como riesgos del productor y del consumidor respectivamente. Estas probabilidades condicionales se pueden expresar en términos de los eventos A y B, definidos de la siguiente forma: A = la unidad es conforme, y B = La unidad se clasifica como no conforme después de la medición[5,6]. Así, tenemos las siguientes expresiones para los riesgos:

$$\alpha = \text{Riesgo del productor} = P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) \quad (4)$$

$$\beta = \text{Riesgo del consumidor} = P(B^c | A^c) = P(A^c \cap B^c) / P(A^c) \quad (5)$$

Como existe variabilidad de pieza a pieza, entonces expresamos el valor real de la característica de interés, por una variable aleatoria X . Como la medición de esta característica contiene dos fuentes de variabilidad, la variabilidad de las piezas y la del instrumento de medición, entonces representamos el valor de la medición por la variable aleatoria Y , que cumple $Y = X + \varepsilon$, donde ε es el error de medición.

Como $X \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$, y $\varepsilon \sim N(0, \sigma_{R\&R}^2)$,

entonces $E(Y) = E(X + \varepsilon) = E(X) + E(\varepsilon) = \mu_p$,

y $V(Y) = V(X + \varepsilon) = V(X) + V(\varepsilon) = \sigma_p^2 + \sigma_{R\&R}^2$

La covarianza entre X y ε es cero, debido a que son independientes. Para calcular los riesgos de consumidor y fabricante, hay que calcular las probabilidades relacionadas con las variables aleatorias X y Y , para lo cual es necesario conocer su distribución conjunta. Para esto solo nos falta conocer la covarianza entre X y Y , que como se puede probar, es

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - \mu_p][Y - \mu_p]\} = \sigma_p^2$$

Por la anterior, tenemos que la función de densidad bivariada de X y Y , es

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - \mu_p \\ y - \mu_p \end{pmatrix}^T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_p \\ y - \mu_p \end{pmatrix}\right]$$

donde el argumento de la función exponencial es una forma cuadrática, en donde el símbolo T representa la transformación del vector columna en vector renglón (transpuesta), y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & \sigma_p^2 \\ \sigma_p^2 & \sigma_p^2 + \sigma_{R\&R}^2 \end{pmatrix}.$$

Enseguida calculamos las probabilidades conjuntas, requeridas para obtener los riesgos α y β .

La probabilidad de que una unidad esté dentro de especificaciones y además la unidad sea clasificada como conforme de acuerdo a la medición es

$$P(A \cap B^c) = \int_{LEI}^{LES} \int_{LEI}^{LES} f(x, y) dx dy. \quad (6)$$

La probabilidad de que una unidad sea conforme y que sea clasificada como no conforme, es

$$P(A \cap B) = \int_{-\infty}^{LEI} \int_{LEI}^{LES} f(x, y) dx dy + \int_{LES}^{\infty} \int_{LEI}^{LES} f(x, y) dx dy. \quad (7)$$

La probabilidad de que una unidad no sea conforme y que sea clasificada como conforme, es

$$P(A^c \cap B^c) = \int_{LEI}^{LES} \int_{-\infty}^{LEI} f(x, y) dx dy + \int_{LEI}^{LES} \int_{LES}^{\infty} f(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Finalmente la probabilidad conjunta de que una unidad no sea conforme, y que esta sea clasificada como no conforme, es

$$P(A^c \cap B) = \int_{-\infty}^{LEI} \int_{-\infty}^{LEI} f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{LEI} \int_{LES}^{\infty} f(x, y) dx dy + \int_{LES}^{\infty} \int_{-\infty}^{LEI} f(x, y) dx dy + \int_{LES}^{\infty} \int_{LES}^{\infty} f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Estas integrales bivariadas, se evalúan en forma numérica [13]. Las otras probabilidades que requerimos para el cálculo de los riesgos del productor y del consumidor, son las marginales

$$P(A) = \int_{LEI}^{LES} f_X(x) dx \quad \text{y} \quad P(A^c) = 1 - P(A).$$

donde f_X es la función de densidad de X.

Ejemplo 2 [5]. Un dispositivo de detección óptica usa una lámpara para iluminar el objetivo. Un parámetro de prueba importante para el desempeño de la lámpara es la luminosidad en unidades de candelas por metro cuadrado (cd/m^2). Un ingeniero ha realizado un estudio R&R y ha encontrado que la razón precisión tolerancia (3), expresada como porcentaje de especificación es, $P/T\% = 38.73\%$. El ingeniero, además encontró durante el estudio que la distribución de la luminosidad de la lámpara es normal, con una media de 35.200 cd/m^2 y una desviación estándar de 4.100 cd/m^2 . Los límites de especificación inferior y superior son respectivamente 30.0 y 42.0 cd/m^2 . La variabilidad R&R del instrumento, puede estimarse a partir del valor del cociente precisión tolerancia (3) como

$$\sigma_{R\&R} = \frac{(P/T)(LES - LEI)}{k} = \frac{(.3873)(42 - 30)}{6.0} = .7746$$

donde k se ha tomado como 6.0. En este caso, el valor de la luminosidad, X y su medición Y , tienen una distribución conjunta normal bivariada, con medias iguales a 35.2 y una matriz de varianzas y covarianzas dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & \sigma_p^2 \\ \sigma_p^2 & \sigma_p^2 + \sigma_{R\&R}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.81 & 16.81 \\ 16.81 & 17.41 \end{pmatrix}$$

En la Tabla 4, mostramos las probabilidades conjuntas de conformidad y clasificación, para las cuatro combinaciones posibles de estar dentro y fuera de especificación (6-9).

	Realmente dentro de especificaciones	Realmente fuera de especificaciones
Clasificada dentro de especificaciones	$P(A \cap B^c) = .8243$	$P(A^c \cap B^c) = .0178$
Clasificada fuera de especificaciones	$P(A \cap B) = .0248$	$P(A^c \cap B) = .1331$

Tabla 4. Probabilidades conjuntas de conformidad y clasificación, para los datos del Ejemplo 2.

Las probabilidades marginales necesarias para obtener las probabilidades condicionales son, la probabilidad $P(A)$ de que la pieza realmente esté dentro de especificaciones,

$$P(A) = \Phi[(42 - 35.2)/4.1] - \Phi[(30 - 35.2)/4.1] = .8491$$

y la probabilidad de que la pieza realmente esté fuera de especificaciones,

$$P(A^c) = 1 - P(A) = .1509$$

Ahora obtenemos los riesgos del fabricante (4) y del consumidor (5):

$$\alpha = .0248 / .8491 = .0292, \\ \beta = .0178 / .1509 = .1180.$$

Estas probabilidades, interpretadas como proporciones, nos indican que por cada 1000 piezas que recibe el cliente, y que fueron clasificadas conformes, en promedio alrededor de 29 estarán fuera de especificaciones. El riesgo del fabricante nos dice que de cada 1000 piezas que produce y que fueron clasificadas como no conformes, en promedio 118 son piezas dentro de especificaciones que se estarán desechando incorrectamente.

EJEMPLO 3. Consideramos el proceso del primer ejemplo, en donde tomaremos como valores verdaderos a las estimaciones de la variabilidad del proceso y del equipo de medición, así como el valor medio del tamaño de las piezas, esto es:

$$\sigma_p^2 = .15785^2 = .024917$$

$$\sigma_{R\&R}^2 = .00792^2 = .000063$$

$$\mu = 3.60.$$

Suponemos además que los límites inferior y superior de especificación son respectivamente, 3.00, y 4.00.

En este caso, el tamaño de la pieza X y su medición se distribuyen conjuntamente como una normal bivariada, con medias iguales a 3.60 y matriz de varianzas y covarianzas es

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & \sigma_p^2 \\ \sigma_p^2 & \sigma_p^2 + \sigma_{R\&R}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .024917 & .024917 \\ .024917 & .024980 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a estos datos, las probabilidades conjuntas de las cuatro combinaciones de estar y clasificar dentro o fuera de especificaciones, se presentan en la Tabla 5.

Las probabilidades marginales, de que las piezas estén dentro y fuera de especificaciones, se calculan como en el Ejemplo 2, estas son respectivamente:

$$P(A) = .994291 \text{ y } P(A^c) = 1 - P(A) = .005709$$

Los valores de los riesgos del fabricante y del consumidor son entonces

$$\alpha = .0003566 / .994291 = .0003586, \\ \beta = .00030360 / .005709 = .053179$$

	Realmente dentro de especificaciones	Realmente fuera de especificaciones
Clasificada dentro de especificaciones	$P(A \cap B^c) = .9939334$	$P(A^c \cap B^c) = .0003036$
Clasificada fuera de especificaciones	$P(A \cap B) = .0003566$	$P(A^c \cap B) = .0054064$

Tabla 5. Probabilidades conjuntas de conformidad y clasificación, para los datos del Ejemplo 3.

Es interesante comparar los dos ejemplos, ya que tenemos dos procesos diferentes. El proceso de medición del ejemplo 3 es globalmente mejor que el del ejemplo 2, comparados con los respectivos procesos de producción que generan las piezas que se miden y clasifican. El hecho de que tengamos una mayor variabilidad relativa (2) del proceso δ en el ejemplo 3, significa que tenemos en este caso, un sistema de medición con mayor precisión, con el que podemos monitorear el proceso con una mayor resolución, que la correspondiente al ejemplo 2.

4. CONCLUSIONES

Se mostró como evaluar la capacidad de un instrumento de medición y su capacidad de

discriminar dentro de las especificaciones de una característica determinada a partir del análisis de los datos que se obtienen de un experimento diseñado para estudiar la variabilidad del instrumento. Además, se calcularon las probabilidades de cometer un error en la clasificación de las unidades generadas por un proceso, conocidas como riesgos del fabricante y del cliente. Se analizaron y compararon dos ejemplos de calculo de riesgos, que corresponden a un instrumento de medición con un desempeño inadecuado, y otro en donde el instrumento de medición tiene un buen desempeño.

AGRADECIMIENTOS

A Román de la Vara por sus oportunos comentarios, que permitieron mejorar una versión inicial de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Smith, G. M., Statistical Process Control and Quality Improvement, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 1998.
- [2] Feigenbaum, A. V., Total Quality Control: Engineering and Management, McGraw Hill, New York, 1983.
- [3] Harry, M. J., Six Sigma: A Breakthrough Strategy for Profitability, Quality Progress, Vol. 31, Num. 5, 1998, 60-64.
- [4] Pande P. S., Neuman, R. C., and Cavanagh, R. R., The Six Sigma Way, Team Fieldbook, McGraw Hill, New York, NY, 2002.
- [5] Mader, P. D., Prins, J., and Lampe, R. E., The economic impact of measurement error, Quality Engineering, **11** (4), 1999, 563-574.
- [6] Doganoksay, N., Assessment of impact of measurement variability in the presence of multiple sources of product variability, Quality Engineering, **13**(2), 2000-01, 83-89.
- [7] Bisgaard, S., Graves, S., and Valverde, R., Quality Quandaries: The impact of measurement Error on Specifications, Quality Engineering, **11**, 1998, 331-335.
- [8] Hahn, G. J., Removing Measurement Error in Assessing Conformance to Specifications, Journal of Quality Technology, **14**(3), 1982, 117-121.
- [9] Vardeman, S., and VanValkenburg, E., Two-Way Random-Effects Analyses and Gauge R&R Studies, Technometrics **41**(3), 1999, 202-211.

- [10] Barrentine, L. B., Concepts for R&R Studies, ASQC Quality Press, Milwaukee, WI., 1991.
- [11] Montgomery, D. C., Introduction to Statistical Quality Control (3rd ed.), J. Wiley, New York, 1996.
- [12] Automotive Industry Action Group, Measurement Systems Analysis Reference Manual, Automotive Action Group, Detroit, MI, 1990.
- [13] Drezner, Z., and Wesolowsky, G. O., on the computation Bivariate Normal Integral, J. Statist. Comput. Simul., **35**, 1990, 101-107.