

INTERACCIÓN DE LA RESOLUCIÓN Y LA REPETIBILIDAD EN LA INCERTIDUMBRE COMBINADA

Wolfgang A. Schmid
 Centro Nacional de Metrología
 Tel.: (442) 211 0554, e-mail: wschmid@cenam.mx

Resumen: Se analiza mediante simulaciones numéricas y apoyado por argumentos teóricos la influencia de la resolución de un instrumento de medición en la repetibilidad de las lecturas (X_1, X_2, \dots, X_n) obtenidas con él. En particular, se analiza el proceso de la estimación de la incertidumbre de la media \bar{X}_n de n mediciones repetidas mediante la desviación estándar experimental de la media de estas lecturas y la contribución de la resolución a la incertidumbre combinada de esta medición.

1. INTRODUCCIÓN

La imperfección natural de la realización de las mediciones hace imposible conocer con certeza absoluta el valor verdadero de una magnitud. Dos limitaciones que en cualquier medición están presentes son la dispersión de lecturas repetidas y la resolución limitada del instrumento de medición [1]. Mientras la resolución, por ser la "diferencia más pequeña entre las indicaciones de un dispositivo indicador que puede ser distinguida significativamente" [2] es una causa originaria que limita el conocimiento exacto del resultado de medición, la dispersión o repetibilidad de las lecturas es más bien un efecto o una manifestación de otras causas originarias. Éstas pueden ser fluctuaciones de parámetros de influencia como la temperatura ambiental o presión atmosférica, vibraciones mecánicas o ruido electromagnético, para sólo mencionar algunas.

Surge la pregunta si la resolución misma tiene una influencia en la repetibilidad de las lecturas. La respuesta es fácil para el caso extremo de una dispersión del mensurando muy pequeña, debido a que puede resultar que toda la dispersión ocurre dentro del intervalo de resolución y todas las lecturas son iguales, o sea la dispersión de las lecturas resulta en cero, a pesar de que el mensurando en realidad varía ligeramente [1]. ¿Pero que pasa si el intervalo de dispersión y de resolución son del mismo orden?

En este artículo se analiza la interacción entre la resolución de un instrumento de medición y la repetibilidad de las lecturas realizadas con él. Se aplica un análisis semi-empírico, enfocado en simulaciones con datos aleatorios y apoyado por argumentos teóricos. Cabe mencionar que estos

últimos no pretenden ser rigurosos en todos los casos.

Con números aleatorios se simulan datos del mensurando X_0 :

$$X_0 = \mu + \delta X \quad (1)$$

con el valor verdadero $\mu = E(X_0)$, donde E es la esperanza y un error aleatorio δX . En este análisis se considera que los errores aleatorios sean normalmente distribuidos con media 0 y desviación estándar σ_0 :

$$\delta X \sim N(0; \sigma_0) \quad (2)$$

No se consideran errores sistemáticos del mensurando que darían contribuciones adicionales a la incertidumbre de la medición.

El efecto de la resolución del instrumento se simula mediante el redondeo a enteros de los datos generados, o sea en todos los casos la resolución se considera como uno. Las posibles contribuciones del instrumento al error aleatorio que no sean debidas a la propia resolución se consideran ya incluidas en δX , resultando en lecturas del instrumento:

$$X = \text{md}(X_0) = \text{md}(\mu + \delta X) \quad (3)$$

donde la función md significa redondear a enteros.

En la sección 2 se analiza la influencia de la resolución en la dispersión de lecturas individuales y en la sección 3 el impacto de la resolución en la estimación de la incertidumbre de una media de n mediciones repetidas mediante la desviación estándar experimental de la media.

2. INFLUENCIA DE LA RESOLUCIÓN EN LA DISPERSIÓN DE MEDICIONES INDIVIDUALES

La discretización por el redondeo de acuerdo a la ecuación (3) teóricamente se puede considerar como un error aleatorio adicional δR , que a diferencia a δX no tiene su origen en la dispersión propia del mensurando X_0 , sino que está generado por el proceso, más bien por el *instrumento* de medición. En consecuencia, el modelo de medición de la ecuación (3) puede ser escrito como

$$X = \mu + \delta X + \delta R \quad (4)$$

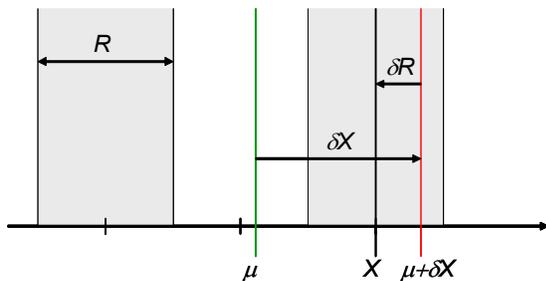


Fig. 1: Ilustración gráfica de la ecuación (4).

δR parece correlacionado a δX , debido a que los dos están relacionados mediante la ecuación (4), en la cuál los demás parámetros son constantes, en el caso de μ , o sólo pueden tomar valores discretos, en el caso de X . Su distribución no puede ser expresada fácilmente y depende tanto de σ_0 como de μ , más bien de la posición del valor verdadero de μ dentro del intervalo de resolución (centrado o a un extremo).

Si σ_0 es considerablemente mas grande que el intervalo de la resolución R , respectivamente su incertidumbre estándar asociada $R/\sqrt{12}$, la dispersión de los datos abarca varios intervalos de la resolución y se supone que la distribución de δR se aproxima a una uniforme $\delta R \sim U(-R/2; R/2)$ con media $E(\delta R) = 0$ y varianza $s^2(\delta R) = E(\delta R^2) = R^2/12$.

En el otro extremo en donde $R/\sqrt{12}$ es mucho más grande que la dispersión σ_0 hay que distinguir dos situaciones. Si μ está más o menos centrado en el intervalo de resolución, la desviación estándar de X tiende a cero y, debido a que $x_{md} - \mu$ es constante, la distribución de $\delta R = x_{md} - \mu - \delta X$ se aproxima a

una normal $\delta R \sim N(x_{md} - \mu; \sigma_0)$. La indicación x_{md} es un posible valor redondeado por el instrumento (ver figura 2a). Si al contrario μ está cerca del límite de resolución, o sea $\mu \approx x_{md} + R/2$, el efecto de δR es, “corregir” μ en la indicación del instrumento por $R/2$ hacia abajo a x_{md} o por $R/2$ hacia arriba al siguiente valor $x_{md}+R$ que puede ser indicado por el instrumento (ver figura 2b). La distribución de δR tiende a una Bernoulli trasladada por $-R/2$: $(\delta R / R + 1/2) \sim Be(0,5)$ y su desviación estándar se aproxima a $s(\delta R) \approx R/2$.

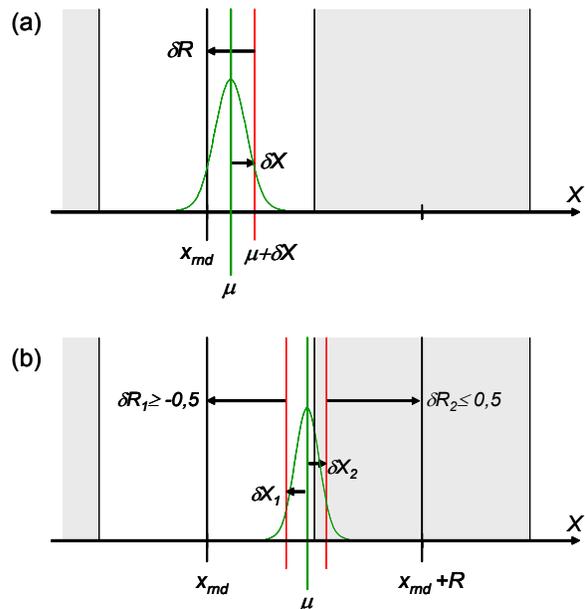


Fig. 2: Ilustración gráfica de la ecuación (4) en el caso de una dispersión pequeña $\sigma_0 < R/\sqrt{12}$.

Estas conclusiones sobre la distribución de δR en las diferentes situaciones se verificaron mediante simulaciones numéricas. En hojas de cálculo de Excel se generaron series de 10 000 datos aleatorios para el error por resolución δR , que se obtiene combinando las ecuaciones (3) y (4):

$$\delta R = md(\mu + \delta X) - (\mu + \delta X) \quad (5)$$

donde μ es constante y los δX son datos aleatorios generados a partir de una distribución normal $\delta X \sim N(0; \sigma_0)$. El redondeo a enteros se realiza en Excel con la función REDONDEAR(...;0).

Las distribuciones de los δR se analizan mediante su distribución acumulada empírica $F(\delta R)$ [3]. En la

figura 3 se observa que tanto para $\mu = 0$ como para $\mu = 0,5$ la distribución de δR es prácticamente uniforme cuando $\sigma_0 = 1$ (incremento lineal de F entre $-0,5$ y $0,5$), lo cuál se mantiene para $\sigma_0 > 1$ (sin mostrar en las gráficas). Para $\sigma_0 < R/\sqrt{12} = 0,289$ se observa como la distribución de δ se aproxima a una normal en el caso de $\mu = 0$ y a una Bernoulli cuando $\mu = 0,5$ con los datos acumulados cerca de $\delta R = \pm 0,5$.

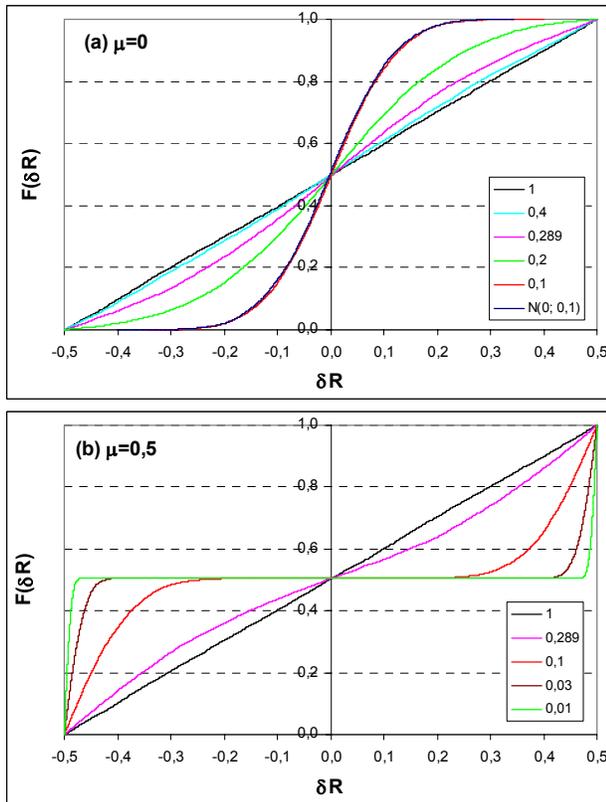


Fig 3: Distribución acumulada empírica $F(\delta R)$ obtenida con simulaciones numéricas para $\mu=0$ y $\mu=0,5$ para diferentes valores de σ_0 (leyenda). En (a) se muestra adicionalmente F de una distribución normal $N(0; 0, 1)$.

2.1. Análisis con diferentes valores de μ fijos

En esta sección se determina la desviación estándar s de X en función de σ_0 y μ . De forma analítica, la varianza $s^2(X)$ se calcula mediante:

$$s^2(X) = E\left[(X - E(X))^2 \right], \tag{6}$$

En el caso de que σ_0 sea mayor que $R/\sqrt{12}$, debido a que $E(\delta X) = 0$ y $E(\delta R) \approx 0$, la esperanza de X

$$E(X) = E(\mu + \delta X + \delta R) = \mu + E(\delta X) + E(\delta R) \approx \mu \tag{7}$$

y en consecuencia

$$s^2(X) = E\left[(X - \mu)^2 \right] = E\left[(\delta X + \delta R)^2 \right] = E(\delta X^2) + 2 \cdot E(\delta X \cdot \delta R) + E(\delta R^2) . \tag{8}$$

Mediante simulaciones numéricas se observó que $E(\delta X \cdot \delta R) \ll \sigma_0$ si σ_0 es mayor que R , mientras $E(\delta X \cdot \delta R)$ es considerablemente grande cuando $\sigma_0 \leq R/\sqrt{12}$. Así finalmente se obtiene:

$$s(X) \approx \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12}} \text{ para } \sigma_0 > R. \tag{9}$$

Se observa que la discretización de los datos X_0 incrementa su desviación estándar en comparación a la original σ_0 . En el lenguaje de un metrologo se diría que se “combinan las incertidumbres estándar por repetibilidad σ_0 y por resolución $R/\sqrt{12}$ para obtener la incertidumbre estándar combinada de las lecturas $s(X)$ ”.

En el otro extremo de $\sigma_0 \ll R/\sqrt{12}$ con μ centrado en el intervalo de resolución, la dispersión de los valores de X desaparece y

$$s(X) \approx 0 , \tag{10}$$

mientras para $\sigma_0 \ll R/\sqrt{12}$ con μ en un extremo del intervalo de resolución $\mu \approx x_{rnd} \pm R/2$ resulta:

$$s(X) \approx s(\delta R) \approx R/2 . \tag{11}$$

El análisis para las situaciones intermedias $\sigma_0 \approx R/\sqrt{12}$ se realiza con simulaciones numéricas, generando series de 10 000 datos aleatorios X_k para X

$$X \sim rnd[N(\mu, \sigma_0)] = rnd[\mu + N(0; \sigma_0)] \tag{12}$$

y calculando su desviación estándar

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot \sum_{k=1}^{10000} (X_k - \bar{X})^2} \quad (13)$$

para diferentes valores de σ_0 y μ , donde \bar{X} es la media de los X_k .

El resultado se muestra en la figura 4. Se observa que para $\sigma_0 > R/\sqrt{12} = 1/\sqrt{12}$ (línea vertical) las desviaciones estándar $s(X)$ se aproximan a $\sqrt{\sigma_0^2 + R^2/12}$, indicado por la línea continua, para todos los valores de μ , sin embargo para $\sigma_0 < R/\sqrt{12}$ los valores difieren de este comportamiento y se aproximan a cero para cuando $\sigma_0 \rightarrow 0$, salvo en el caso de $\mu = 0,5$. Aunque se seleccionaron para μ valores entre 0 y 0,5 se obtendrían los mismos resultados sustituyendo μ por cualquier número entero $\pm \mu$.

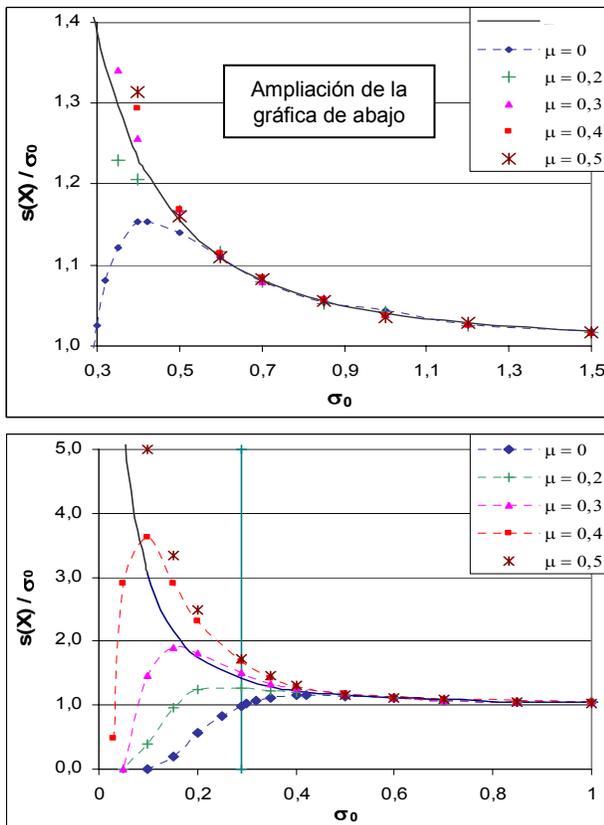


Fig. 4: Comportamiento de las desviaciones estándar $s(X)$ de los datos redondeados $X \sim \text{rnd}[N(\mu; \sigma_0)]$ en relación a σ_0 y la comparación con el comportamiento dado por la ecuación (9).

2.2. Análisis variando μ

Con el propósito de analizar la influencia de la resolución en la repetibilidad de los datos de una forma más general, sin tener que considerar la influencia de la posición de μ , en el siguiente paso se introduce una variación aleatoria precisamente de μ . La variación de μ refleja el problema que la posición de μ dentro del intervalo de resolución en mediciones reales no es conocida y puede tomar cualquier valor entre $-R/2$ y $R/2$.

Pensando en un ejemplo práctico, esto puede describir la situación que tiene un sistema de medición bajo control estadístico, o sea con σ_0 fijo, y se están realizando mediciones repetidas siempre de la misma magnitud pero a lo mejor de diferentes artefactos, resultando en diferentes valores de μ para cada medición o serie de mediciones.

Para cubrir todas las posibles situaciones respecto a la posición de μ en el intervalo de resolución con la misma probabilidad, se asigna a μ una distribución uniforme sobre un intervalo de resolución (centrado en cero, lo cuál no significa una restricción):

$$\mu \sim U(-R/2; R/2) \quad (14)$$

Interpretando la incertidumbre de la medición como la dispersión de los valores obtenidos en las mediciones alrededor del valor verdadero del mensurando, la incertidumbre por repetibilidad de las lecturas $u_A(X)$, evaluada por un método tipo A [4] se obtiene mediante

$$u_A(X) = s(X - \mu) = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} \quad (15)$$

Con la ecuación (4) resulta en equivalencia a la ecuación (8):

$$u_A^2(X) = E[(\delta X + \delta R)^2] = E(\delta X^2) + 2 \cdot E(\delta X \cdot \delta R) + E(\delta R^2) \quad (16)$$

En equivalencia a la sección 2.1 con $E(\delta X^2) = \sigma_0^2$, $E(\delta R^2) = R^2/12$ y $E(\delta X \cdot \delta R) \approx 0$ (este último por lo menos para σ_0 pequeño), se obtiene:

$$u_A(X) = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12}} \quad (17)$$

Este resultado se verifica mediante una simulación numérica similar a las de la sección 2.1., pero sustituyendo la ecuación (12) por

$$X \sim \text{rnd}[U(-R/2; R/2) + N(0; \sigma_0)] \quad (18)$$

y calculando $s(X - \mu)$ con los datos de la simulación. El resultado se muestra en la figura 5. Se observa que $u_A(X) = s(X - \mu)$ sigue en muy buena aproximación $\sqrt{\sigma_0^2 + R^2/12}$, indicado por la línea. Nuevamente este resultado muestra que la discretización de los datos en consecuencia de la resolución incrementa su desviación estándar de acuerdo a la ecuación (9).

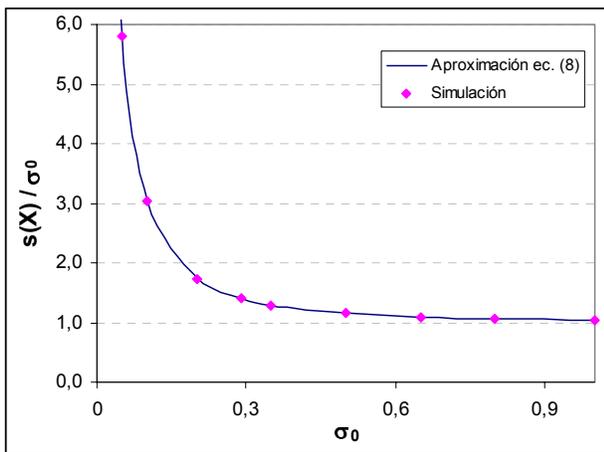


Fig. 5: Comportamiento de las desviaciones estándar $s(X - \mu)$ de los datos redondeados de acuerdo a la ecuación (18) en relación a σ_0 y la comparación con el comportamiento dado por la ecuación (9).

3. INTERACCIÓN ENTRE LA RESOLUCIÓN Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA MEDIA

En esta sección se analiza el caso más común de las mediciones: El mensurando X se determina mediante una serie de mediciones repetidas ($X_1; X_2; \dots X_n$), tomando como su mejor estimado la media

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad (19)$$

y estimando su incertidumbre por repetibilidad con la desviación estándar experimental de la media

$$u_A(\bar{X}_n) = s(\bar{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \quad (20)$$

El índice A indica que esta evaluación se representa un método tipo A.

En equivalencia a la sección anterior, de una manera teórica la incertidumbre de esta medición puede ser considerada como la dispersión de los resultados de medición \bar{X}_n alrededor del valor verdadero, pero desconocido, del mensurando μ , cuantificada por:

$$u(\bar{X}_n) = \sqrt{E([\bar{X}_n - \mu]^2)} \quad (21)$$

$u(\bar{X}_n)$ se puede aproximar por (ver anexo):

$$u(\bar{X}_n) \approx \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12} \right)} \quad (22)$$

Las ecuaciones (20), (21) y (22) representan tres diferentes expresiones de la incertidumbre. $u(\bar{X}_n)$ puede ser interpretada como la incertidumbre “verdadera”, expresada en la ecuación (21) de manera “exacta” mediante una integral sobre toda la población de posibles resultados de medición. La ecuación (22) da una solución analítica, aunque en aproximación. A diferencia, la ecuación (20) representa la “estimación” de la incertidumbre mediante la dispersión de los datos de una sola medición (más bien serie de n mediciones repetidas).

Las tres expresiones de la incertidumbre se comparan mediante simulaciones numéricas. En hojas de cálculo de Excel se generan con datos aleatorios 10 000 valores $(\bar{x}_n)_k$ del mensurando \bar{X}_n , simulando de esta manera 10 000 mediciones:

$$(\bar{x}_n)_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{k,i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \text{rnd}(\mu_k + \sigma_0 \cdot \delta x_{k,i}) \quad (23)$$

donde:

- k índice de numeración ($k = 1 \dots 10\,000$),
- μ_k valor verdadero en la medición k , por su desconocimiento se considera $\mu_k \sim U(-R/2; R/2)$,

σ_0 desviación estándar
(constante para las k mediciones)
 $\sigma_0 \cdot \delta X_{k,i}$ error aleatorio del dato i de la medición k ,
 $\delta X_{k,i} \sim N(0,1)$

$$u_A(\bar{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot \sum_{k=1}^{10000} (u_{A,k}(\bar{X}_n))^2} \quad (24)$$

La incertidumbre “verdadera” se calcula de acuerdo a la ecuación (21) por:

$$u(\bar{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot \sum_{k=1}^{10000} ((\bar{X}_n)_k - \mu_k)^2} \quad (25)$$

Para cada “medición” se “estima” la incertidumbre por repetibilidad $u_{A,k}(\bar{X}_n)$ de acuerdo a la ecuación (20). Para tener un valor único, se promedian los $u_{A,k}(\bar{X}_n)$ por el promedio de las varianzas:

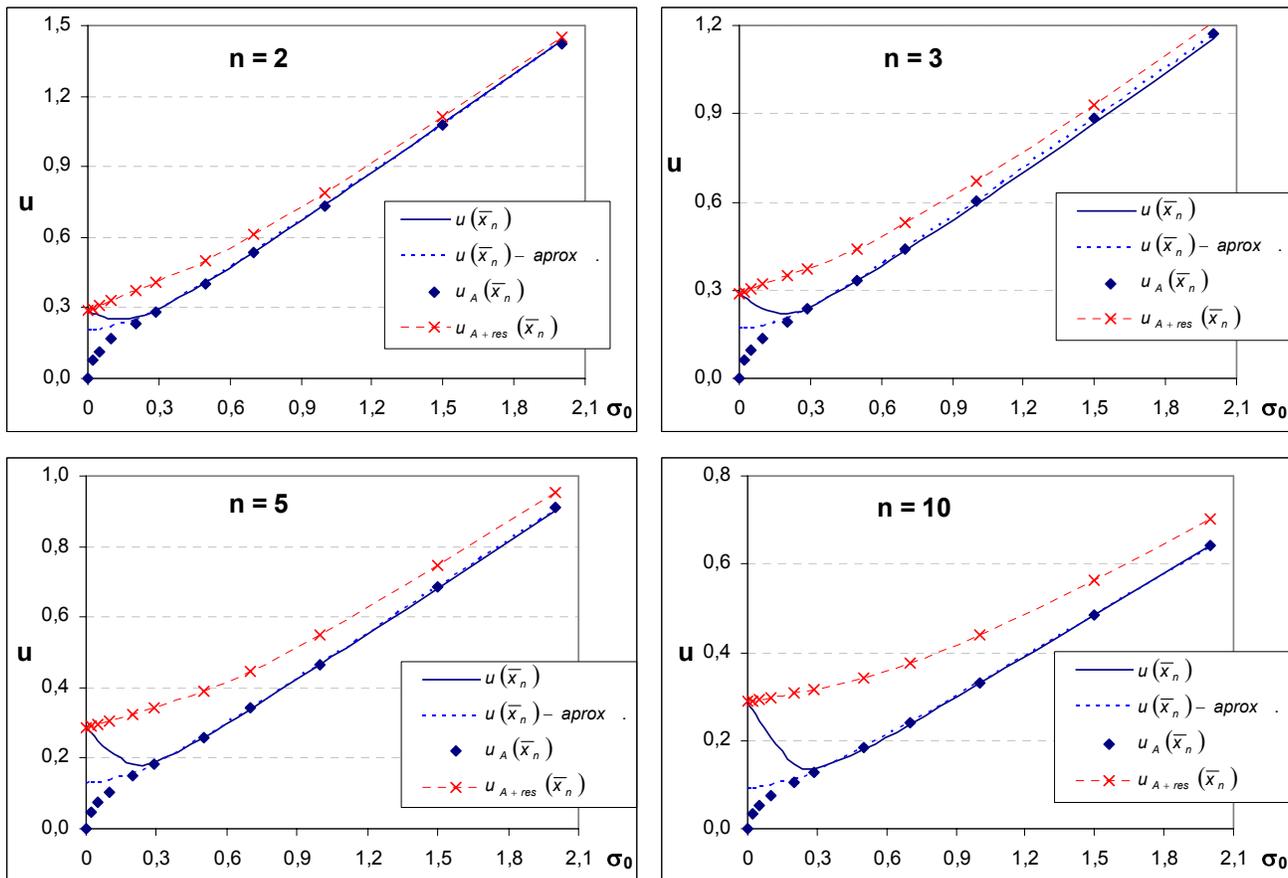


Fig. 6: Comparación de $u(\bar{X}_n)$ obtenido por simulación numérica y en la aproximación analítica de acuerdo a la ecuación (22) con $u_A(\bar{X}_n)$ y $u_{A+res}(\bar{X}_n)$ para $n = 2, 3, 5$ y 10 .

En la figura 6 se muestran los resultados de $u_A(\bar{X}_n)$ y $u(\bar{X}_n)$ en función de σ_0 . Se observa una buena coincidencia entre $u_A(\bar{X}_n)$ y $u(\bar{X}_n)$ para $\sigma_0 > u_{res}$, donde u_{res} es la incertidumbre estándar por resolución $u_{res} = R/\sqrt{12} = 1/\sqrt{12} \approx 0,29$. Para valores menores de σ_0 , $u_A(\bar{X}_n)$ es

significativamente más pequeño que $u(\bar{X}_n)$ y se aproxima a cero para $\sigma_0 \rightarrow 0$, mientras $u(\bar{X}_n)$ tiende a $u_{res} \approx 0,29$. Este último se esperaba, debido a que la dispersión de los valores de \bar{X}_n tiende a cero, así que $u(\bar{X}_n)$ de acuerdo a la ecuación (25) se obtiene a partir de la dispersión de los μ_k con una distribución uniforme entre $-0,5$ y $0,5$.

También la aproximación de $u(\bar{X}_n)$ por la expresión analítica (21) coincide sólo para $\sigma_0 > u_{res}$.

En primera instancia parece sorprendente que la incertidumbre “verdadera” $u(\bar{X}_n)$ pueda tomar valores más pequeños que la incertidumbre por resolución u_{res} , un resultado que las simulaciones muestran cuando $\sigma_0 \approx u_{res}$. Se nota en las gráficas que este valor mínimo de $u(\bar{X}_n)$ disminuye cuando se incrementa n . Este detalle por sí parece razonable, debido a que un mayor número de repeticiones proporciona información más segura, o sea con menor incertidumbre.

Sin embargo, queda la duda por qué $u(\bar{X}_n)$ puede ser menor a u_{res} . Supóngase que el valor verdadero μ desvíe de un valor entero x_{rnd} que puede indicar el instrumento por la cantidad δ , o sea $\mu = x_{rnd} + \delta$. Cuando $\sigma_0 \approx 0$ todas las n lecturas repetidas dan x_{rnd} y el error de esta medición es δ , el cuál puede ser uniformemente distribuido en el intervalo de resolución; en consecuencia, la incertidumbre de esta medición es $u_{res} = R/\sqrt{12}$. Cuando σ_0 incrementa, la probabilidad de que alguna de las n lecturas repetidas da un valor diferente a x_{rnd} incrementa. Si δ por ejemplo es positivo, o sea $0 < \delta < 0,5$, lo más probable es que una o varias lecturas dan $x_{rnd} + 1$. En consecuencia el resultado de la medición \bar{X}_n se encontrará entre x_{rnd} y $x_{rnd} + 0,5$ y con esto probablemente más cercano a μ que el resultado $\bar{X}_n = x_{rnd}$ que uno obtiene con cero dispersión $\sigma_0 = 0$. Esto significa que la incertidumbre en este caso de poca dispersión (por ejemplo $\sigma_0 \approx u_{res}$) es menor que en el caso de cero dispersión. Cuando σ_0 incrementa más, la incertidumbre finalmente está dominada cada vez más por σ_0 .

Debido a que es una práctica frecuente agregar a los balances de incertidumbre tanto la incertidumbre por repetibilidad $u_A(\bar{X}_n)$ como la incertidumbre por resolución u_{res} , las mismas gráficas presentan adicionalmente estos valores obtenidos por

$$u_{A+res}(\bar{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot \sum_{k=1}^{10000} \left[(u_{A,k}(\bar{X}_n))^2 + u_{res}^2 \right]} \quad (26)$$

Se observa que $u_{A+res}(\bar{X}_n)$ es más grande que $u(\bar{X}_n)$ en todo el alcance de σ_0 , o sea sobreestima los valores de incertidumbre. Esta sobreestimación es más significativa para valores mayores de n . Sin embargo, para $\sigma_0 \rightarrow 0$, $u_{A+res}(\bar{X}_n)$ se aproxima al valor de $u(\bar{X}_n) \approx u_{res}$.

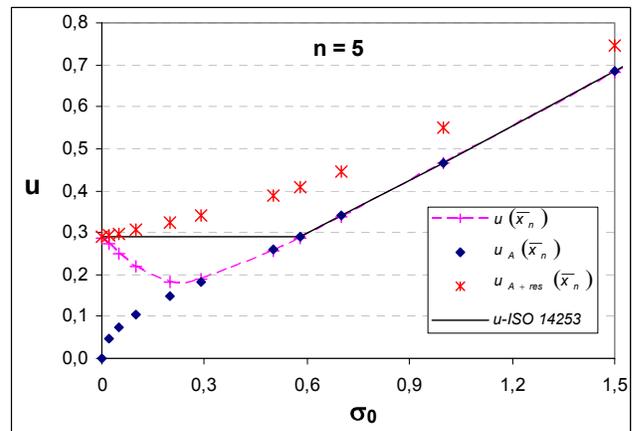


Fig. 7: La propuesta de la ISO-14253 (línea) en el ejemplo de $n=5$ mediciones repetidas.

Es evidente que ninguna de las dos opciones, (a) considerar en el balance de incertidumbres exclusivamente la incertidumbre por repetibilidad u_A o (b) combinar u_A con u_{res} da una solución satisfactoria en todo el alcance de σ_0 . Este problema es considerado por ejemplo en la norma ISO 14253 [5], que propone considerar de las dos posibles contribuciones u_A o u_{res} sólo la más grande. Esta propuesta aplicada al ejemplo de $n = 5$ repeticiones se muestra en la figura 7 (línea continua). Se observa que para valores grandes de σ_0 (cuando se considera u_A), ésta da el valor justo de la incertidumbre. Para valores pequeños de σ_0 (cuando se considera u_{res}), se obtiene una sobreestimación de la incertidumbre, sin embargo, ésta es decente y la aproximación al valor “verdadero” de la incertidumbre es mejor que en cualquiera de los opciones (a) o (b).

4. CONCLUSIONES

Se mostró mediante simulaciones numéricas la influencia de la resolución de un instrumento de medición en la dispersión de los resultados obtenidos. Se observa que, a consecuencia del redondeo de los datos originales por la resolución, la desviación estándar $s(X)$ de las lecturas puede

tanto incrementarse como disminuirse en comparación a la desviación estándar σ_0 de los datos originales.

Para $\sigma_0 > R/\sqrt{12}$, $s(X)$ siempre incrementa de tal forma que la incertidumbre por resolución del instrumento se agrega a la incertidumbre por repetibilidad de los valores originales X_0 del mensurando. En consecuencia, la práctica frecuente de sumar en los balances de incertidumbres la incertidumbre por repetibilidad u_A y la incertidumbre por resolución u_{res} resulta en una sobreestimación de la incertidumbre combinada.

Para $\sigma_0 \approx R/\sqrt{12}$ la situación es más complicada. En el caso particular de que el mensurando se estima mediante la media de n mediciones repetidas, la incertidumbre “verdadera” $u(\bar{X}_n)$ disminuye a valores abajo de u_{res} , pero incrementa nuevamente a $u(\bar{X}_n) = u_{res}$ para $\sigma_0 \rightarrow 0$. La incertidumbre “estimada” $u_A(\bar{X}_n)$ a partir de la repetibilidad de las lecturas sigue la tendencia de $u(\bar{X}_n)$ hasta $\sigma_0 \approx R/\sqrt{12}$, pero tiende a cero para $\sigma_0 \rightarrow 0$ y no representa una estimación apropiada de la incertidumbre para $\sigma_0 \leq R/\sqrt{12}$. En consecuencia es necesario considerar la

incertidumbre por resolución en el balance de incertidumbres, lo cuál se logra de la manera más apropiada, evitando una sobreestimación considerable, sustituyendo u_A por u_{res} cuando $u_A < u_{res}$ en lugar de sumar los dos.

REFERENCIAS

- [1] I. Lira, W. Wöger, The evaluation of standard uncertainty in the presence of limited resolution of indicating device, *Meas. Sci. Technol.* **8** (1997), 441-443
- [2] International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology, BIOM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML (1993)
- [3] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements. Supplement 1: Numerical methods for the propagation of distributions (draft), BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 2004
- [4] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1995
- [5] Geometrical product specifications (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment, Part 2, ISO/TR 14253-2

ANEXO: Derivación de la ecuación (22)

La ecuación (21) define la incertidumbre de \bar{X}_n : $u(\bar{X}_n) = \sqrt{E([\bar{X}_n - \mu]^2)}$,

donde la media \bar{X}_n está dada por: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\mu + \delta X_i + \delta R_i) = \mu + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\delta X_i + \delta R_i)$

Con esto resulta:

$$\begin{aligned}
 E([\bar{X}_n - \mu]^2) &= E\left[\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\delta X_i + \delta R_i)\right)^2\right] = \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n (\delta X_i + \delta R_i) \cdot \sum_{j=1}^n (\delta X_j + \delta R_j)\right) = \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n (\delta X_i^2 + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_i + \delta R_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\delta X_i \cdot \delta X_j + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_j + \delta R_i \cdot \delta R_j)\right) = \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n E(\delta X_i^2 + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_i + \delta R_i^2) + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E(\delta X_i \cdot \delta X_j + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_j + \delta R_i \cdot \delta R_j) = \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot E(\delta X_i^2 + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_i + \delta R_i^2) + \frac{1}{n^2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot E(\delta X_i \cdot \delta X_j + 2 \cdot \delta X_i \cdot \delta R_j + \delta R_i \cdot \delta R_j) = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot [E(\delta X_i^2) + E(\delta R_i^2) + 2 \cdot E(\delta X_i \cdot \delta R_i)] + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot [E(\delta X_i \cdot \delta X_j) + 2 \cdot E(\delta X_i \cdot \delta R_j) + E(\delta R_i \cdot \delta R_j)] = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left[\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12} + 2 \cdot E(\delta X \cdot \delta R)\right]
 \end{aligned}$$

$E(\delta X_i \cdot \delta X_j) = E(\delta X_i \cdot \delta R_j) = E(\delta R_i \cdot \delta R_j) = 0$, debido a que son las esperanzas de distribuciones del producto de dos variables independientes con $E(\delta X) = E(\delta R) = 0$

Resulta finalmente: $u(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12} + 2 \cdot E(\delta X \cdot \delta R)\right)$

Para $\sigma_0 \gg \frac{R}{\sqrt{12}}$ resulta que $E(\delta X \cdot \delta R) \approx 0$ y finalmente $u(\bar{X}_n) \approx \frac{1}{n} \cdot \left(\sigma_0^2 + \frac{R^2}{12}\right)$