

# Estimación de la Incertidumbre de Medición del Sistema de Voltímetros Digitales Empleado en el Experimento del Efecto Hall Cuántico

Alfonso Torres Rios, Felipe León Hernández Marquez

Centro Nacional de Metrología  
km 4,5 Carretera a Los Cués, 76241, Querétaro, México.  
atorres@cenam.mx

## RESUMEN

En el laboratorio del efecto Hall cuántico del CENAM se utiliza un sistema de medición de voltímetros digitales para hacer la transferencia del valor de la resistencia de Hall cuantizada a resistores de trabajo comerciales de 10 k $\Omega$ . El sistema puede ser representado en un modelo matemático que permita el cálculo de la incertidumbre, ya que en este modelo se encuentran implícitas las fuentes de incertidumbre más importantes que afectan a la medición.

## 1. INTRODUCCIÓN

El experimento del efecto Hall cuántico permite reproducir la unidad de resistencia eléctrica (ohm), cuyo valor es conocido en términos de dos constantes físicas fundamentales: la carga del electrón ( $e$ ) y la constante de Planck ( $h$ ), esto permite que su valor sea invariable en el tiempo. El experimento se realiza en varios institutos nacionales de metrología con el propósito de mantener y comparar la unidad de resistencia eléctrica.

En el Centro Nacional de Metrología (CENAM) el valor de la resistencia Hall cuantizada se transfiere hacia resistores comerciales de 10 k $\Omega$  mediante un sistema de medición llamado de voltímetros digitales, que es uno de los dos métodos más usados para medir resistencia eléctrica. El sistema consiste, básicamente, en la comparación del valor de la resistencia Hall cuantizada y el resistor comercial que se encuentran conectados en serie y alimentadas con una fuente de corriente o de tensión altamente estable. El valor de resistencia del resistor de 10 k $\Omega$  se determina a través de la relación de sus tensiones y el valor de la resistencia Hall cuantizada.

Para poder determinar la incertidumbre de medición del sistema de voltímetros digitales fue necesario modelarlo de tal manera que se pudieran incluir todas las fuentes de incertidumbre en el sistema. Entre las que se encuentran las siguientes: resistencias de contacto de los relevadores utilizados en el sistema, la temperatura, así como la impedancia de entrada, la no-linealidad y la corriente de polarización de los voltímetros empleados. Todas estas fuentes de

incertidumbre fueron medidas en un proceso de caracterización del sistema.

El modelo del sistema permitió estimar la incertidumbre a partir de los datos generados durante la caracterización del sistema. Esta herramienta además nos ha permitido hallar los elementos del sistema que contribuyen en mayor grado a la incertidumbre de medición de la calibración de los resistores comerciales.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE MEDICIÓN

En la Fig. 1 se muestra un esquema del sistema de medición empleado. El sistema de medición es alimentado por una fuente de tensión de alta estabilidad ( $V_F$ ) conectada en serie con una resistencia de alto valor ( $R_F$ ). La fuente de tensión es conectada al circuito usando relevadores, de tal forma que se pueda invertir el sentido de la corriente automáticamente. Los relevadores del sistema y la resistencia del cableado son representados en una sola resistencia de contacto ( $r_c$ ) en serie con la resistencia de la fuente ( $R_F$ ). El resistor de trabajo y el dispositivo Hall son representados por la resistencia  $R_S$  y la resistencia  $R_H$ , respectivamente. Los elementos parásitos del voltímetro se representan conectados en paralelo a  $R_S$  y a  $R_H$ : la impedancia de entrada ( $Z_i$ ) y la corriente de polarización ( $I_{DVMi}$ ). En cada voltímetro se conecta la terminal de bajo (LO) a la tierra indicada en el esquema. Conectados de esta manera se obtienen dos niveles de tensión muy cercanos entre sí, aunque de signo contrario.

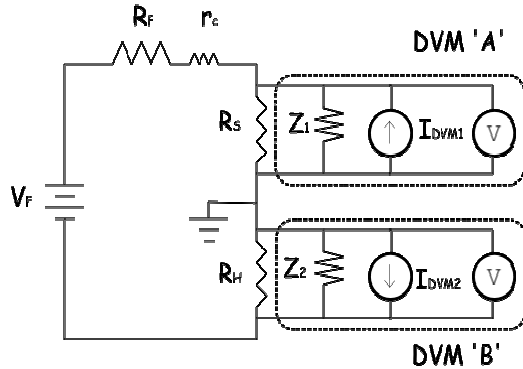


Fig. 1. Esquema eléctrico del sistema de voltímetros digitales empleado en el experimento del efecto Hall cuántico.

Las mediciones son realizadas siguiendo el orden descrito por Marullo-Reedtz y Cage [1], usando dos voltímetros en el sistema. La secuencia inicia aplicando una corriente 'positiva' al circuito para medir la tensión en el resistor de trabajo y en el dispositivo Hall. Se invierte el sentido de la corriente y se miden las tensiones en ambos elementos. Se repite lo anterior, pero ahora se inicia aplicando una corriente 'negativa'. La secuencia que se produce es la siguiente:

$$\begin{matrix} V_S(I+), V_S(I-), V_S(I-), V_S(I+) \\ V_H(I+), V_H(I-), V_H(I-), V_H(I+) \end{matrix} \quad (1)$$

Se repite esta secuencia de tal manera que se tengan dos mediciones tal como se muestra a continuación:

$$\begin{matrix} V_S(I+), V_S(I-), V_S(I-), V_S(I+) \rightarrow \langle V_{S1} \rangle \\ V_H(I+), V_H(I-), V_H(I-), V_H(I+) \rightarrow \langle V_{H1} \rangle, \\ V_H(I+), V_H(I-), V_H(I-), V_H(I+) \rightarrow \langle V_{H2} \rangle \\ V_S(I+), V_S(I-), V_S(I-), V_S(I+) \rightarrow \langle V_{S2} \rangle \end{matrix} \quad (2)$$

donde cada grupo de cuatro mediciones representa el promedio de las tensiones en una posición dada de los voltímetros, y se muestran a la derecha de cada grupo. Mediante esta secuencia se logran disminuir los efectos producidos por FEM's térmicas y variaciones de la corriente que sean lineales en el tiempo. Al finalizar las mediciones, se realiza un promedio de las tensiones  $\langle V_{S1} \rangle$  y  $\langle V_{S2} \rangle$  y también para las tensiones  $\langle V_{H1} \rangle$  y  $\langle V_{H2} \rangle$  de tal manera que se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle V_S^A \rangle &= \frac{\langle V_{S1} \rangle + \langle V_{S2} \rangle}{2} \\ \langle V_H^B \rangle &= \frac{\langle V_{H1} \rangle + \langle V_{H2} \rangle}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\langle V_R^A \rangle$  representa el promedio de tensiones medidas con el voltmetro A, y  $\langle V_H^B \rangle$  representa el promedio de tensiones medidas con el voltmetro B. Se realiza la misma secuencia, con la diferencia de que ahora se cambian de posición los voltímetros. Entonces se obtienen las tensiones  $\langle V_R^B \rangle$  y  $\langle V_H^A \rangle$ . En teoría, si la corriente que pasa a través del circuito es constante se cumple que:

$$\frac{\langle V_S^B \rangle}{\langle V_H^A \rangle} = \frac{\langle V_S^A \rangle}{\langle V_H^B \rangle} = \frac{R_S}{R_H} \quad (4a)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\langle V_S^A \rangle}{\langle V_H^B \rangle} + \frac{\langle V_S^B \rangle}{\langle V_H^A \rangle} \right) \cdot R_H = R_S \quad (4b)$$

En la práctica esto se complica debido a varios factores que afectan al sistema, como lo son las tensiones generadas térmicamente, la resistencia de fuga, resistencias de contacto, inestabilidades de la fuente, ruido en el voltmetro, etc. Pero varios de estos factores son minimizados mediante el método de medición propuesto. Existen otros factores que afectan al sistema de medición de manera sistemática, que deben ser eliminados independientemente del método de medición.

Entre los elementos que introducen un error sistemático al sistema se encuentran los relevadores. Éstos sirven para cambiar el sentido de la polaridad del circuito y poder realizar la medición de manera automática. La resistencia de los relevadores no es la misma en ambos sentidos de la corriente, por tanto introduce un error sistemático en la medición. Este factor se puede disminuir si se usan relevadores que tengan un valor de resistencia que permanezca dentro de un intervalo. De acuerdo con [2] la variación en  $r_c$  afecta a la corriente del sistema, y por tanto a la incertidumbre del sistema. Si se mantiene la variación de la corriente ( $\delta I$ ) por debajo de  $10^{-8} \mu A/A$  se asegura una incertidumbre por debajo de  $10^{-7} \mu \Omega/\Omega$ . Si se expresa la resistencia de la fuente

$R_F$  como una admitancia  $Y_F$ , entonces la variación en la corriente está dada por:

$$\delta I = \frac{Y_F \delta r_C}{[1 + (R_H + R_S) Y_F]} \quad (5)$$

**3. MODELO DEL SISTEMA**

Del circuito de la Fig. 1 se propone la representación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} R_F + r_c + R_H + R_S & -R_H & -R_S \\ -R_H & R_H + Z_1 & 0 \\ -R_S & 0 & R_S + Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_F \\ -I_{DVM1} Z_1 \\ I_{DVM2} Z_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Mediante la representación matricial de las ecuaciones del circuito usando la ley de corrientes de Kirchhoff se tiene un modelo matemático del sistema de medición completo. De esta manera se toman en cuenta los elementos parásitos del sistema que afectan a la incertidumbre del sistema.

A partir del modelo se calculan las tensiones en  $R_S$  y  $R_H$ , el valor de estas tensiones son dependientes de los elementos que afectan las condiciones ideales del sistema. Por lo tanto se pueden representar las tensiones en  $R_S$  y  $R_H$  como:

$$\begin{aligned} V_H &= f[V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_1, I_{DVM1}, Z_2, I_{DVM2}] \\ V_S &= g[V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_1, I_{DVM1}, Z_2, I_{DVM2}] \end{aligned} \quad (7)$$

Si se tiene una caracterización del sistema de medición se pueden sustituir los valores dentro de estas funciones para obtener un valor estimado de las tensiones que se observa.

**4. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE**

Usando las funciones para calcular las tensiones en los resistores  $R_S$  y  $R_H$  se obtiene el valor estimado de la lectura de los voltímetros. Conociendo el valor de las tensiones se puede aplicar la misma metodología de medición usando las funciones. Para lograr una reproducción de la medición es necesario tener caracterizado todo el sistema de medición. Esto es, tener los valores de resistencia de contacto de los relevadores, impedancia de entrada, no linealidades y corriente de polarización de cada voltmetro.

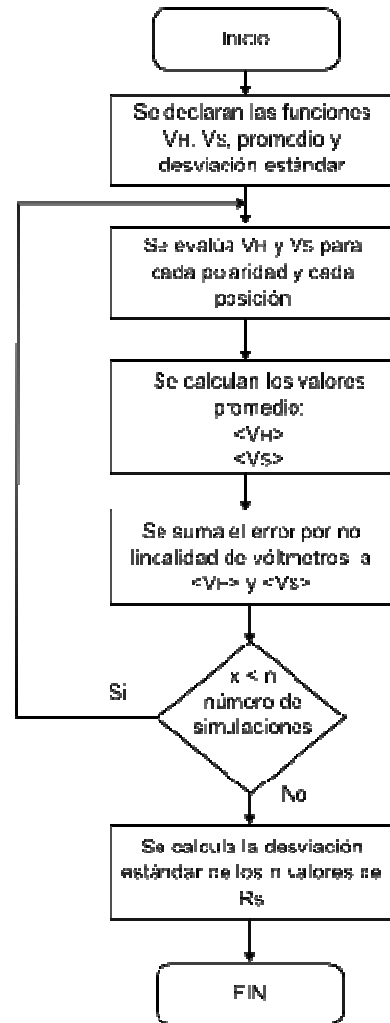


Fig. 2. Diagrama de flujo del algoritmo usado para el cálculo de la incertidumbre del sistema de voltímetros digitales.

La secuencia de medición del sistema se puede programar mediante el uso de las funciones de las Ecs. (7). Para lograr obtener un valor estimado de la incertidumbre se usan valores aleatorios que tienen cierta distribución que corresponde a la que se observa en cada valor del sistema. Con la caracterización es posible obtener el tipo de distribución de cada elemento.

Así, para la primera posición de los voltímetros y con una corriente positiva del circuito se tiene que simular que se toman las tensiones. Esto se logra sustituyendo el valor de la fuente de tensión con un valor de tensión positivo, además de sustituir el valor de la impedancia de entrada y la corriente de polarización correspondiente a la posición en

donde se encuentren colocados los voltímetros, tal como las Ecs. (7). Si se realiza un cambio de polaridad basta con cambiar la polaridad de la fuente de tensión, tal como:

$$\begin{aligned} V_H &= f[-V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_1, I_{DVM1}, Z_2, I_{DVM2}] \\ V_S &= g[-V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_1, I_{DVM1}, Z_2, I_{DVM2}] \end{aligned} \quad (8)$$

Para representar un cambio de posición de los voltímetros se requiere cambiar de posición los valores de la impedancia de entrada y la corriente de polaridad en las funciones:

$$\begin{aligned} V_H &= f[V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_2, I_{DVM2}, Z_1, I_{DVM1}] \\ V_S &= g[V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_2, I_{DVM2}, Z_1, I_{DVM1}] \end{aligned} \quad (9)$$

En la segunda posición y con cambio de polaridad las funciones se evalúan como:

$$\begin{aligned} V_H &= f[-V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_2, I_{DVM2}, Z_1, I_{DVM1}] \\ V_S &= g[-V_F, r_c, R_F, R_H, R_S, Z_2, I_{DVM2}, Z_1, I_{DVM1}] \end{aligned} \quad (10)$$

Con la Ecs. (7) a (10) se puede simular la reproducción del método de medición propuesto para la calibración de resistores usando el sistema de voltímetros digitales.

En el método de medición se realizan cuatro mediciones de tensión en una sola posición y en un sentido de la corriente. En el programa de simulación se llama cuatro veces a las funciones para cada posición de los voltímetros y para cada sentido de la corriente, Ecs. (7) a (10).

Los valores de tensión calculados son entonces usados para obtener el valor de resistencia, usando las Ecs. (3) para promediar las tensiones en ambas polaridades y en una posición de los voltímetros. A este promedio se le suma el error debido a la no-linealidad de los voltímetros (que también es una función de distribución). Con los promedios corregidos se calcula el valor de  $R_S$  con la Ec. (4b).

Se realiza un número 'n' de simulaciones para obtener una desviación estándar de los valores de  $R_S$  calculados en cada iteración del programa. El valor de la desviación estándar será la incertidumbre debido al sistema de medición.

### 5. RESULTADOS

Los resistores de 10 kΩ se calibran con la resistencia Hall cuantizada cuando  $i=2$ , donde  $R_H(i=2)=12\ 906,403\ 5\ \Omega$ . Se elige este valor de resistencia Hall cuantizada por ser el más cercano al valor del resistor de trabajo a calibrar [3].

El cálculo de la incertidumbre del resultado de la medición es en base a la siguiente Ec. (11):

$$R_{S(23^\circ C)} = K \cdot R_H \cdot (1 + \alpha(T - 23^\circ C) + \beta(T - 23^\circ C)^2), \quad (11)$$

donde:

$$K = \frac{V_S}{V_H}, \quad (12)$$

es la relación de tensiones en los dos resistores, T es la temperatura en el resistor de trabajo  $R_S$ , y  $\alpha$  y  $\beta$  son el coeficiente lineal y cuadrático de temperatura respectivamente.

El término K de la Ec. (11) involucra en su totalidad al sistema de medición, y por tanto a la incertidumbre asociada a éste será la estimada con el algoritmo y modelo propuesto en este trabajo.

Los valores para cada componente que afecta a la incertidumbre del sistema de medición se calcularon de manera independiente. Se mantiene todas las variables del sistema con un valor constante mientras que a la variable bajo inspección se le asigna valores aleatorios que tienen una distribución de probabilidad. Esto es equivalente a estimar el coeficiente de sensibilidad de manera experimental. Se obtiene la siguiente tabla con los valores de incertidumbre relativa:

Tabla 1. Efectos que afectan la incertidumbre del sistema de voltímetros digitales.

Componente de incertidumbre	Incertidumbre estándar ( $\mu\Omega/\Omega$ )
Mediciones	0.005
Temperatura	0.007
Resistencia de relevadores	0.0003
Corriente de polarización de voltímetros	0.026
Impedancia de entrada de voltímetros	0.007
Linealidad de voltímetros	0.033
<b>Incertidumbre combinada k=2</b>	<b>0.085</b>

En la Tabla 1 aparecen los factores más importantes que afectan a la medición con su respectiva contribución de incertidumbre. La primera componente de incertidumbre, llamada 'mediciones' se refiere a la incertidumbre estándar de las mediciones realizadas por el sistema.

## 6. CONCLUSION

La implementación del modelo matemático en un lenguaje de programación hizo posible realizar el cálculo de la incertidumbre del sistema de medición. Además de esto se puede cuantificar el efecto que produce cada una de las fuentes de incertidumbre al sistema de medición.

Fue posible detectar que la componente de mayor peso en el cálculo de la incertidumbre es la no linealidad de los voltímetros. La causa de esto es el hecho de usar dos voltímetros a dos tensiones distintas, pues los resistores no son del mismo valor y por lo tanto la incertidumbre aumenta considerablemente.

El sistema de medición es capaz de realizar mediciones con una incertidumbre menor a  $0.09 \mu\Omega/\Omega$ . Dado que la resistencia Hall cuantizada no deriva con el tiempo es posible medir la deriva de los resistores de trabajo que tienden a derivar con el tiempo.

## REFERENCIAS

- [1] G. Marullo-Reedtz, M. E. Cage, An Automated Potentiometric System for Precision Measurement of the quantized Hall Resistance, J. Res. Natl. Bur. Stand. (U.S.), 303-310, 1987.
- [2] Kevin C. Lee, Marvin E. Cage, Patrick S Rowe. Sources of uncertainty in a DVM-based measurement system for a quantized Hall resistance Standard, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Vol. 99, No. 3, May-June 1994.
- [3] Recommended Intrinsic/Derived Standards Practice RISP-3, National Conference of Standards Laboratories, August 1997.