

# CARTAS DE CONTROL PARA MONITOREAR PROCESOS DE CALIBRACIÓN DE INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Enrique Villa Diharce (1) y María Guadalupe Russell Noriega (2).

(1) Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Gto  
Tel. (473)7327155, Fax. (473)7325749, Email: [villadi@cimat.mx](mailto:villadi@cimat.mx)

(2) Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán Sin.  
Tel. (676)7161154, Fax (676)7161154, Email: [mgrussell@uas.uasnet.mx](mailto:mgrussell@uas.uasnet.mx)

**RESUMEN:** En este trabajo se discuten dos procedimientos para monitorear procesos de calibración lineal utilizando cartas de control. Se ilustra su aplicación a un conjunto de datos reales de calibración de un sistema óptico de medición en donde se miden tres patrones de referencia. Los procedimientos se comparan a través de sus longitudes de corrida promedio (ARL) obtenidas mediante un estudio de simulación, analizando el comportamiento de los mismos bajo desplazamientos en los parámetros del modelo de calibración lineal: intercepto, pendiente y varianza del término de error.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de medición deficiente que nos arroja mediciones con una exactitud insuficiente para la aplicación requerida, nos puede llevar a tomar decisiones erróneas o a invalidar una tarea a causa de las mediciones incorrectas.

Por ejemplo, en el caso de la aplicación de radiación en una terapia, el paciente puede sufrir un daño si la dosis es muy alta o en caso de ser muy baja, puede ser que el tratamiento no alcance el efecto esperado.

En el caso de estudios de degradación, por ejemplo, donde se realizan mediciones periódicas de una característica que se degrada a través del tiempo, si en un momento determinado, cambia la exactitud del instrumento de medición y no nos enteramos, las mediciones serán incorrectas y con esto, el estudio se pierde.

Ocurre entonces que un sistema de medición cuya función de calibración ha perdido vigencia, puede generar un daño a la salud, o un costo económico.

Un Programa de Aseguramiento de Mediciones (PAM) requiere de la calibración periódica de los instrumentos de medición, para verificar que su exactitud y precisión se mantienen estables y en control a través del tiempo.

Para monitorear el proceso de calibración de un instrumento de medición, podemos utilizar cartas de

control. Esta herramienta es de gran uso en la industria para el control estadístico de procesos.

La aplicación de las cartas de control para monitorear procesos de calibración de instrumentos de medición, se ha llevado a cabo desde hace tiempo como podemos verlo en Croarkin et al. [1] y Croarkin y Varner [2].

Las cartas de control propuestas inicialmente por Shewhart [3], son cartas univariadas, utilizadas para monitorear una característica de calidad de un producto, que se mide periódicamente.

Las cartas de control univariadas tradicionales se utilizan para monitorear una característica de calidad, cuya variación se supone que sigue una distribución normal.

La construcción y el uso de las cartas se basa en la existencia de dos fuentes de variación en los procesos. La variación debida a causas comunes o aleatorias y la variación debida a causas especiales. La variación aleatoria no se puede modificar ni controlar, a diferencia las fuentes de variabilidad especial si pueden ser modificadas y corregidas una vez que son identificadas. Y de aquí que el objetivo en el uso de una carta de control sea identificar las causas de variación especial cuando estas están presentes en un proceso.

Estas cartas son gráficas que tienen tres líneas horizontales: una línea central ubicada a una altura igual a la media de la distribución normal y dos más, ubicadas a una distancia de tres desviaciones arriba

y abajo de la media. En esta carta se grafican los valores que se miden periódicamente de la característica de interés en cada una de las unidades que se monitorean.

Si el patrón gráfico de dichos valores sigue un patrón que no corresponde a un proceso normal, lo interpretamos como una señal que nos indica que el proceso está fuera de control. En este caso, revisamos el proceso para encontrar y eliminar la(s) fuente(s) específica(s) de variación que ha causado la salida de control del proceso. Con esta operación, mantenemos el proceso en control estadístico.

Estas cartas de control son herramientas gráficas que nos permiten probar la hipótesis de normalidad y estabilidad del proceso a través del tiempo.

La propuesta multivariada de las cartas de control se debe a Alt [4], el interés ahora es monitorear procesos en donde la calidad se expresa no por una variable, sino por varias características que se miden simultáneamente.

Las cartas multivariadas se construyen siguiendo la lógica de las cartas univariadas, aplicada a observaciones vectoriales. Básicamente se calcula un estadístico que contiene la información de las observaciones multivariadas y se grafica dicho estadístico a través del tiempo conjuntamente con sus límites de control.

Sin embargo, debido a la mayor complejidad de los procesos y disponibilidad tecnológica en los últimos años, estamos encontrando procesos en donde la calidad se expresa a través de una relación funcional de una variable respuesta con una o más variables explicativas.

En este caso, las cartas de control que se requieren para monitorear el proceso, son cartas en donde se le da seguimiento a través del tiempo a una función que expresa la calidad del producto generado por el proceso.

En el análisis vía control estadístico de procesos se consideran dos fases, identificadas en la literatura como Fase I y Fase II, y que corresponden la fase de construcción de la carta vía el análisis de datos históricos y a la fase del monitoreo futuro del proceso respectivamente.

La longitud de corrida es el tiempo que transcurre hasta que la carta detecta una salida de control del proceso.

En este trabajo abordamos precisamente estas cartas, conocidas como cartas de control para datos funcionales o de perfiles, las cuales nos dan una señal de fuera de control del proceso, cuando la función observada tiene un patrón estadísticamente diferente al comportamiento del proceso, ver Kim et al. [5].

El proceso de calibración periódica de un instrumento de medición, puede considerarse como un proceso en donde periódicamente muestreamos la curva de calibración de dicho instrumento. Cuando hay un cambio significativo en la curva de calibración, este puede detectarse a través de una carta de control para perfiles.

La detección oportuna de un cambio en la curva de calibración es importante, para evitar resultados de medición no conformes.

En este trabajo, se describen las Fases I y II, de construcción y aplicación de cartas de control para monitorear procesos de calibración lineal y se muestra como extender el análisis para procesos de calibración polinomial. Se ilustra el procedimiento utilizando un conjunto de datos reales de calibración lineal, publicado originalmente por Croarkin y Varner [2]. Además, se compara el desempeño de este esquema contra el de Kim et al. [5] en la Fase II de monitoreo.

El criterio de comparación es la longitud promedio de corrida (ARL), bajo diferentes desplazamientos del intercepto, la pendiente y la varianza del error.

## 2. MONITOREO DE PROCESOS DE CALIBRACIÓN

A continuación, describimos el monitoreo de procesos de calibración lineal con cartas de control para perfiles.

Una curva de calibración se establece de acuerdo a la relación funcional entre los valores del instrumento de medición y los valores aceptados de los patrones de referencia utilizados en la calibración.

Para monitorear los perfiles de calibración lineal, consideramos que estos siguen el modelo de regresión lineal:

$$y_{ij} = \gamma_0 + \gamma_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Las  $y_{ij}$  representan el valor de la respuesta del instrumento correspondiente al valor  $x_i$  del patrón de referencia, en el  $j$ -ésimo período de calibración. El término de error  $\varepsilon_{ij}$  se considera que tiene distribución de calibración lineal tenemos tres parámetros:  $\gamma_0, \gamma_1, \sigma^2$ , el intercepto, la pendiente y la varianza del error, respectivamente.

En la Fase I de la construcción de la carta de control, determinamos a partir de datos históricos de calibración, los valores de los parámetros que corresponden al proceso de calibración bajo control. El criterio para evaluar el desempeño de una carta en la Fase I se da a través de las probabilidades de falsas alarmas.

Una falsa alarma consiste en una salida de control de un proceso que se encuentra bajo control. El interés práctico es que las probabilidades de falsas alarmas sean muy pequeñas, ya que una falsa alarma nos lleva a buscar el origen de las causas de variación especial, cuando en realidad estas no existen.

La Fase II del análisis se refiere a el uso de la carta de control para el monitoreo del proceso. Una vez que hemos estimado los parámetros del modelo de calibración, pasamos a la Fase II del análisis, en donde utilizamos los valores estimados de los parámetros como si fueran sus valores verdaderos.

En la Fase II, la evaluación del desempeño de la carta se basa en la longitud promedio de corrida (ARL). En esta etapa nos interesa tener valores grandes del ARL, ya que ARL pequeños nos dan un número considerable de falsas alarmas.

### 3. CARTAS DE CONTROL

#### 3.1. Procedimiento de Kim et al. [5]

En vista de que un modelo lineal se caracteriza por sus parámetros que son, el intercepto, la pendiente y la varianza del error, el monitoreo de las curvas se puede plantear en términos del monitoreo de estos parámetros. Como consecuencia, el monitoreo de las curvas de calibración, se puede llevar a cabo utilizando cartas de control (multivariadas) para las estimaciones periódicas de los tres parámetros mencionados.

La interpretación de la carta de control se puede simplificar, utilizando una codificación de los valores de la variable  $x$ , de tal forma que el promedio de los valores codificados sea cero. De la teoría de regresión lineal, sabemos que en este caso las estimaciones del intercepto y la pendiente son independientes. De aquí que para el monitoreo del proceso de calibración, le damos seguimiento en forma separada a los tres parámetros del modelo lineal, utilizando para cada parámetro una carta de control tipo Shewhart tradicional.

Cuando al menos, uno de los tres parámetros se sale de control, decimos que la curva de calibración correspondiente se sale de control, esto es, cambia significativamente.

Para la Fase II de la construcción de la carta, Kim et al. [5] propusieron monitorear las rectas de calibración que se estiman periódicamente, a través de tres cartas EWMA [6] o Shewhart, una para cada parámetro del modelo de regresión lineal, el intercepto, la pendiente y la varianza del error, considerando el reescalamiento de la variable  $x$ , que ya mencionamos.

Con esta transformación tenemos tres cartas independientes. El modelo (1) se transforma en el modelo re-escalado dado por

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

donde  $\beta_0 = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{x}$ ,  $\beta_1 = \gamma_1$  y  $x_i^* = x_i - \bar{x}$

La línea central y los límites de control en la carta del intercepto son,

$$\begin{aligned} LC &= \beta_0 \\ LCI &= \beta_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 / n} \\ LCS &= \beta_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 / n} \end{aligned} \quad (3)$$

En el caso de la carta para la pendiente, la línea central y los límites son,

$$\begin{aligned} LC &= \beta_1 \\ LCI &= \beta_1 - z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 / S_{xx}} \\ LCS &= \beta_1 + z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 / S_{xx}} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Monitoreamos la varianza del error con la carta que tiene los siguientes límites,

$$\begin{aligned}
 LC &= \sigma^2 \\
 LCI &= \frac{\sigma^2}{n-2} \chi_{\alpha/2, n-2}^2 \quad (5) \\
 LCS &= \frac{\sigma^2}{n-2} \chi_{(1-\alpha/2), n-2}^2
 \end{aligned}$$

Siendo  $\chi_{\alpha/2, n-2}$  y  $\chi_{1-\alpha/2, n-2}$  los cuantiles  $(1-\alpha/2)$  y  $\alpha/2$  de la distribución Ji-cuadrada con  $n-2$  grados de libertad. Los niveles de probabilidad  $\alpha$  se eligen de tal forma que resulte un valor global de probabilidad  $\alpha^*$  de falsas alarmas del procedimiento, que satisface la relación  $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^3$ .

**3.2. Procedimiento de Croarkin y Varner [2]**

Croarkin y Varner [2] propusieron monitorear un proceso de calibración lineal basado en la medición de varios patrones de referencia en cada período de tiempo. Las desviaciones entre los valores medidos y los patrones, se grafican simultáneamente sobre una carta tipo Shewhart.

$$z_{ij} = (y_{ij} - \gamma_0) / \gamma_1 - x_i, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k, \quad (6)$$

Los límites de control inferior y superior de esta carta, son respectivamente,

$$\begin{aligned}
 LCI &= z_{\alpha/2} s_c \\
 LCS &= -z_{\alpha/2} s_c
 \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$s_c = \frac{\sigma}{\gamma_1} \quad (8)$$

Suponiendo que  $\sigma$  es la desviación estándar conocida de  $y_{ij}$ . El valor  $z_{\alpha/2}$  es el cuantil  $1-\alpha/2$  de la distribución normal estándar, para la probabilidad  $\alpha$ , de tal forma que resulte una probabilidad global de falsas alarmas  $\alpha^*$ , dada por

$$\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^n, \quad (9)$$

siendo  $n$  el número de patrones evaluados en cada calibración y el valor de  $\alpha^*$  se elige para tener una longitud promedio de corrida en control, ARL, deseada, considerando que  $ARL = 1/\alpha^*$ . Este procedimiento se describe en el manual de métodos estadísticos en línea NIST/SEMATECH [7]. En este manual, se sugiere evaluar solo 3 patrones en cada calibración.

En la Fase I de la construcción de la carta, los valores en control de los parámetros no son conocidos y deben ser estimados por medio de una colección de datos históricos del proceso bajo estudio. En este caso se pueden usar las expresiones (3, 4, 5 y 7) para calcular los límites de control, sustituyendo los valores conocidos de los parámetros por sus estimaciones y utilizando la distribución  $t$  en lugar de la normal en el cálculo de los cuantiles.

**Tabla 1. Mediciones sucesivas de los patrones de referencia, clasificados como bajo, medio y alto. X=valor del patrón y Y=lectura del instrumento bajo calibración.**

Día	Posición	X	Y
1	B	0.76	1.12
1	M	3.29	3.49
1	A	8.89	9.11
2	B	0.76	0.99
2	M	3.29	3.53
2	A	8.89	8.89
3	B	0.76	1.05
3	M	3.29	3.46
3	A	8.89	9.02
4	B	0.76	0.76
4	M	3.29	3.75
4	A	8.89	9.30
5	B	0.76	0.96
5	M	3.29	3.53
5	A	8.89	9.05
6	B	0.76	1.03
6	M	3.29	3.52
6	A	8.89	9.02

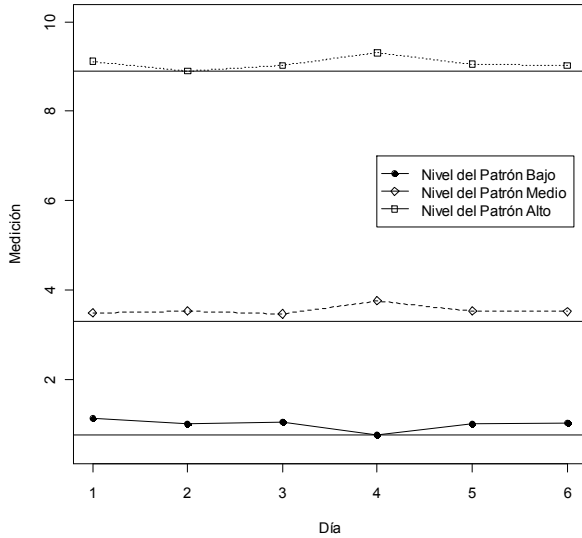
**4. EJEMPLO**

En el manual NIST/SEMATECH [7] se presenta un ejemplo de calibración de un sistema óptico de medición que tiene una curva de calibración lineal. En este ejemplo los parámetros del modelo de regresión lineal (1) se estimaron previamente ( $\hat{\gamma}_0 = 0.2817$ ,  $\hat{\gamma}_1 = .9767$  y  $\hat{\sigma} = .06826$ ), usando 40 mediciones que resultaron de medir cuatro veces diez patrones de referencia. Estas estimaciones se consideran para la Fase II de la construcción de las cartas, como los valores verdaderos de los parámetros.

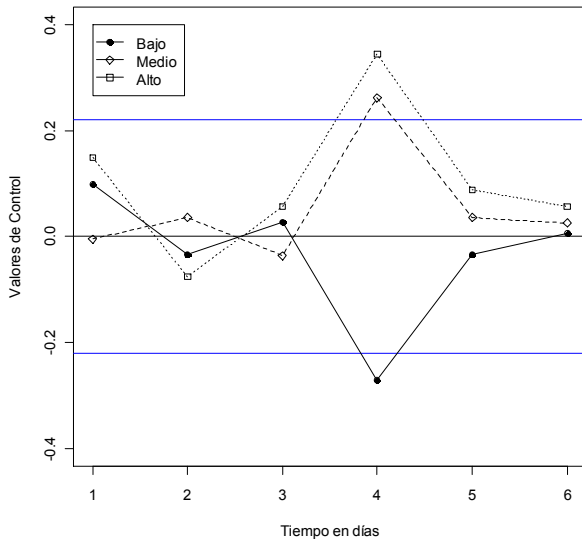
En la Tabla 1, se presentan los datos del monitoreo del proceso de calibración del sistema óptico durante seis días. En este monitoreo, se midieron

tres patrones de referencia (B=bajo, M=medio y A=alto).

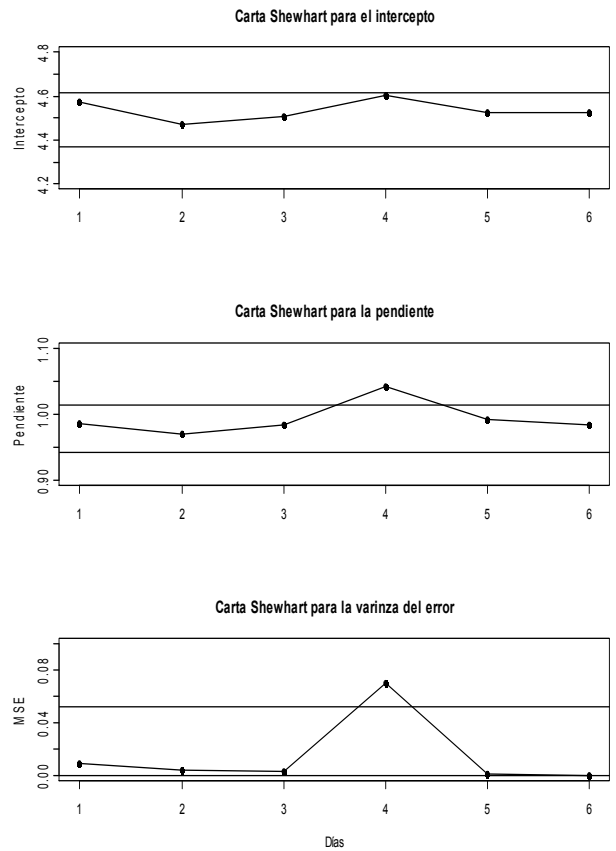
La Figura 1 muestra graficamente las mediciones de los tres patrones de referencia, obtenidas con el instrumento bajo calibración. Aquí observamos que las mediciones del cuarto día difieren de las demás.



**Fig. 1** Mediciones sucesivas del instrumento bajo calibración, de tres patrones de referencia.



**Fig. 2** Carta de control de Croarkin y Varner para los tres patrones de referencia.



**Fig. 3** Cartas de control tipo Shewhart de Kim et al para los parámetros del modelo de regresión lineal.

En la Figura 2, tenemos la carta de Croarkin y Varner, con los valores de control de los tres patrones de referencia para las seis calibraciones sucesivas. Observamos que las mediciones del cuarto día están fuera de control para los tres patrones.

En la Figura 3, se muestran las cartas de control independientes para los tres parámetros del modelo (2), en donde apreciamos que para el cuarto día, solo los valores de control de la pendiente y la varianza del error, salen de control. Esto significa que la calibración del cuarto día sale de control, debido a un cambio drástico en la pendiente y en la varianza del error.

Una diferencia entre las cartas de Croarkin y Varner y de Kim et al., es que la primera nos muestra en que patrón se presenta la desviación de medición, pero no nos indica cómo cambia la recta de calibración. En cambio para las cartas de cada uno

de los parámetros del modelo de calibración, podemos identificar como cambia la curva de calibración. Con esto tenemos más información de la recta de calibración.

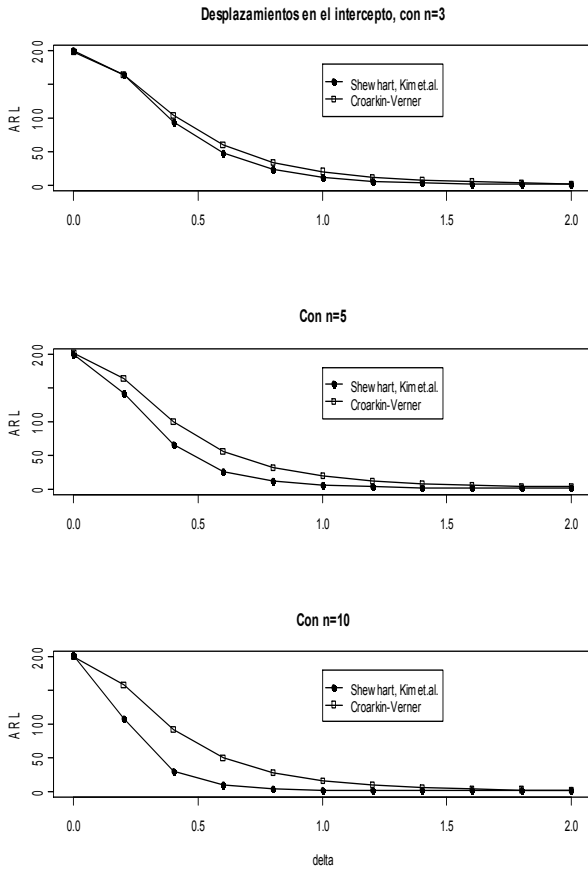


Fig 4 Comparación del ARL bajo desplazamientos del intercepto de  $\gamma_0$  a  $\gamma_0 + \delta\sigma$ .

5. COMPARACIONES

Comparamos las cartas de Croarkin y Varner y de Kim et al., a través de un estudio de simulación, desarrollado en el lenguaje de cómputo estadístico R [8], en donde suponemos un modelo de calibración lineal (1), con valores de los parámetros iguales a los valores reportados en el Ejemplo,  $\hat{\gamma}_0 = 0.2817$ ,  $\hat{\gamma}_1 = .9767$  y  $\hat{\sigma} = .06826$ . Para cada parámetro, se estudia la forma en que cambia el ARL de su carta a medida que crece el desplazamiento del parámetro. Para el intercepto, se considera el desplazamiento de  $\gamma_0$  a  $\gamma_0 + \delta\sigma$  para valores de  $\delta$  de 0 a 2, con incrementos de 0.2. En el caso de la pendiente, se considera el desplazamiento de  $\gamma_1$  a  $\gamma_1 + \delta\sigma$  para valores de  $\delta$

de 0 a 0.25, con incrementos de 0.025. En el caso de la desviación estándar, se considera el corrimiento de  $\sigma$  a  $\delta\sigma$ , para valores de  $\delta$  de 1.0 a 2.0, con incrementos de 0.10.

En el monitoreo de cada uno de los parámetros, consideramos tres escenarios, tres, cinco y diez patrones de referencia. El ARL en todos los casos se obtuvo promediando la longitud de corrida, RL de 10000 simulaciones.

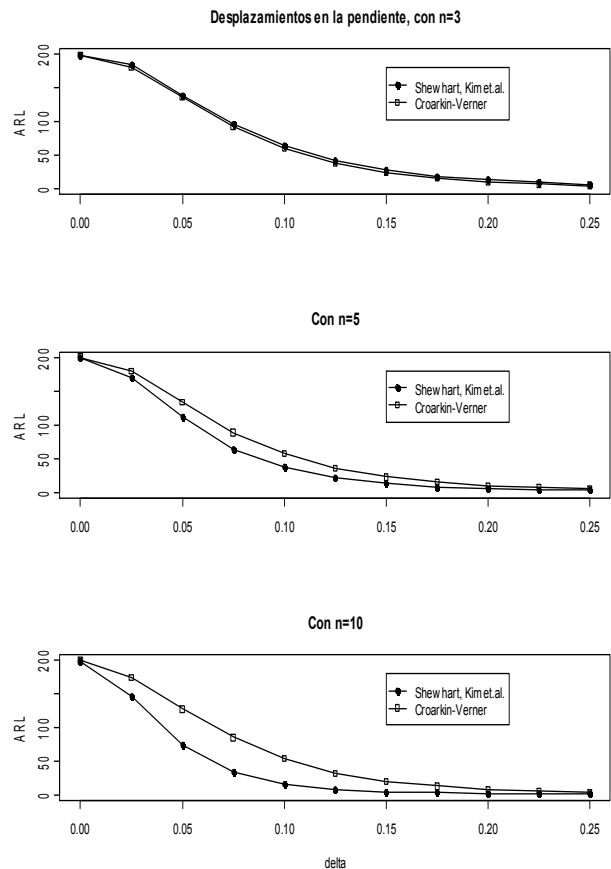
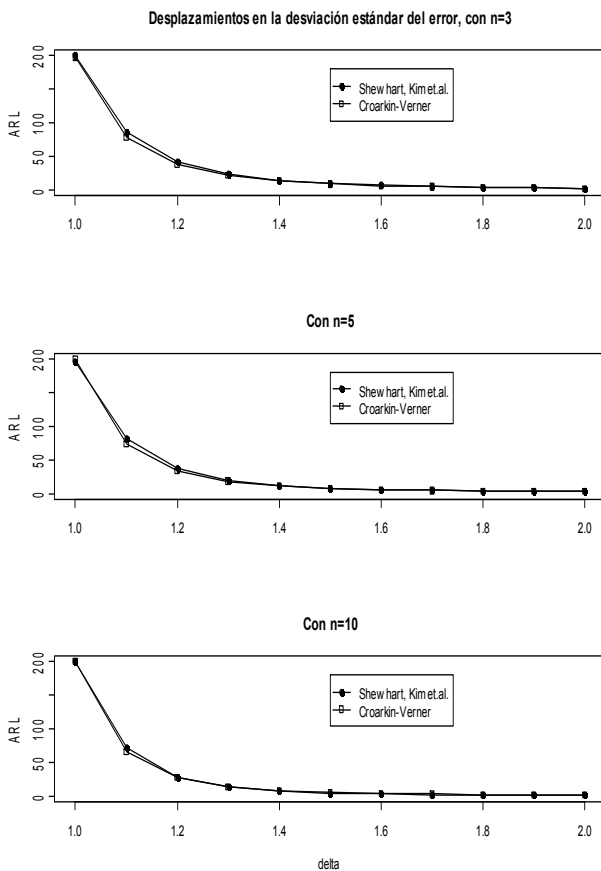


Fig. 5 Comparación del ARL bajo desplazamientos de la pendiente de  $\gamma_1$  a  $\gamma_1 + \delta\sigma$ .

En la Figura 4 podemos apreciar que las diferencias en los ARL de ambas cartas para el intercepto aumentan a medida que crece el número de patrones de referencia. Cuando la diferencia de los ARL es grande encontramos que la carta de Kim et al. presenta valores de ARL menores que la carta de Croarkin y Varner. Esto significa que la carta de Kim et al. detecta más rápidamente los desplazamientos en el intercepto.

En la Figura 5, tenemos el comportamiento de los ARL bajo desplazamientos de la pendiente del modelo de calibración lineal (1). Observamos un comportamiento similar al que resulta cuando se desplaza el intercepto, como los notamos en la Figura 4.

En general observamos que cuando aumenta la información sobre la recta de calibración, las cartas de Kim et al. detectan más rápidamente los desplazamientos de intercepto o pendiente.



**Fig. 6** Comparación del ARL bajo desplazamientos de la desviación estándar del error de  $\sigma$  a  $\delta\sigma$ .

En la figura 6 observamos que el impacto del desplazamiento de la desviación estándar del error es muy similar en ambas cartas. Al observar las formas de las curvas, notamos que la reducción de los ARL es mayor cuando desplazamos la desviación estándar del error que cuando desplazamos el intercepto o la pendiente.

## 6. CONCLUSIONES

El monitoreo de las curvas de calibración a través del tiempo, puede generar información para optimizar la frecuencia de calibración y así mantener un determinado nivel de exactitud y precisión.

En este trabajo se discuten dos tipos de cartas de control que se pueden utilizar para monitorear procesos de calibración lineal. La carta de Croarkin y Varner que monitorea las desviaciones de las mediciones de diferentes patrones de referencia en forma simultánea y las cartas de Kim et al. que siguen una estrategia diferente debido a que monitorean los parámetros del modelo de calibración lineal a través de las diferentes calibraciones y da información directa del comportamiento de la curva de calibración a través del tiempo.

El estudio de simulación que se llevó a cabo para comparar las dos cartas a través de los ARL, mostró que el procedimiento propuesto por Kim et al. [5] se desempeña mejor que el procedimiento de Croarkin y Varner [2] a medida que aumenta el número de patrones de referencia utilizados.

La carta de Croarkin y Varner se construyó utilizando las estimaciones del valor  $x_i$  del patrón de referencia, dadas por

$$\hat{x}_i = (y_{ij} - \hat{\gamma}_0) / \hat{\gamma}_1,$$

Siendo  $y_{ij}$  la variable medida y  $\hat{\gamma}_0$  y  $\hat{\gamma}_1$  las estimaciones del intercepto y pendiente respectivamente. Este estimador tiene varios problemas (varianza infinita y esperanza indefinida) que se han discutido en la literatura, Berkson [9] y Krutchkoff [10].

Esta complicación, además de la comparación de ambos enfoques en la construcción de las cartas, sugieren que es preferible usar el enfoque de Kim et al.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado con financiamiento parcial del Proyecto PROFAPI2010/123, UAS, "Cartas de Control para Datos Funcionales".

**REFERENCIAS**

- [1] Croarkin, C., Beers, J., and Tucker, C. "Measurement Assurance for Gage Blocks," *NBS(U.S.) Monograph 163*. 1979.
- [2] Croarkin, C. y Varner, R. Measurement assurance for dimensional measurements of integrated-circuit photomasks. *NBS(U.S.) Technical Note 1164*. 1982.
- [3] Shewhart, W. A. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand, N. Y., 1931.
- [4] F.B. Alt, F.B. , Multivariate quality control, in N. L. J. S.Kots & C. R. Read, end, *Encyclopedia of Statistical Sciencies*, Jonh Wiley, N. Y., 1984.
- [5] Kim, K., Mahmoud, M. A. y Woodall, W. H., On the monitoring of linear profiles, *Journal of Quality Technology*, 35, 317-328. 2003.
- [6] Montgomery, D. C. *Introduction to Statistical Process Control*, 2<sup>nd</sup> Ed. Wiley, New York, 1991.
- [7] NIST/SEMATECH, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/mpc/section3/mpc37.htm>).
- [8] R development Core Team. *R:A language and environmental for statistical computing* . R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-00051-07-0, URL <http://WWW.R-project.org>. 2010.
- [9] Berkson, J. estimation of a linear function for a calibration line; consideration of a recent proposal. *Technometrics*, 11, 1969, pp 649-660.
- [10] Krutchkoff, R. G. Classical and inverse regression methods of calibration. *Technometrics*, 9, 1976, pp 425-439.