

# ANÁLISIS DE LOS COEFICIENTES ESTADÍSTICOS DE FORMA PARA DETERMINAR LA NO LINEALIDAD DE UN MODELO DE MEDICIÓN

Martines López E., Lira Cortés L.  
 Centro Nacional de Metrología  
 Km 4.5 Carretera a Los Cués, El Marqués Querétaro  
 Tel 442 2110500, x3420, emartine@cenam.mx

**Resumen:** Una herramienta para determinar la no linealidad de los modelos de medición es la evaluación de los coeficientes estadísticos de forma como son la agudez (curtosis) y el coeficiente de asimetría, los cuales están presentes en el desarrollo en la serie de Taylor para modelos no lineales. En este trabajo se presentan casos de modelos medición de humedad no lineales y se muestra que los coeficientes de agudez y de asimetría dan información útil para confirmar la no linealidad. Adicionalmente, se muestra que en los casos no lineales es más conveniente usar el método de Monte Carlo en lugar del método de la GUM (guía para la estimación de la incertidumbre).

## 1. INTRODUCCIÓN

La guía para la estimación de la incertidumbre (GUM, por sus siglas en inglés) es el documento de referencia que describe el método para estimar la incertidumbre de un modelo de medición, la cual tiene como base el desarrollo en series de Taylor [1].

La propagación de la incertidumbre por el método GUM en modelos lineales se describe satisfactoriamente con la aproximación en series de Taylor a primer orden; sin embargo, en modelos no lineales se requiere hacer la expansión a términos de orden superior.

El desarrollo en la serie de Taylor a términos de orden superior, permite que la propagación de la incertidumbre incluya a los coeficientes estadísticos de forma, como son el coeficiente de asimetría y el coeficiente de agudez (o curtosis), ya que éstos están relacionados con el tercer y cuarto momentos de una distribución de probabilidad [2].

En este trabajo se evalúan los coeficientes estadísticos de forma y su efecto en modelos de medición no lineales.

## 2. COEFICIENTES ESTADÍSTICOS DE FORMA

Los coeficientes estadísticos de forma son aquellos que dan información gráfica de la forma de una función de densidad de probabilidad. En particular son útiles para determinar cuando la distribución de un conjunto de datos se desvía de una curva normal estándar.

Los dos tipos de coeficientes de forma que se analizarán son el coeficiente de asimetría y el coeficiente de agudez.

### 2.1. Coeficiente de asimetría

Se define como el tercer momento de una distribución de probabilidad, y mide la falta de simetría de un conjunto de datos o de una distribución de probabilidad. Se calcula mediante la Ecuación (1)

$$\beta_1 = \frac{E(X - \mu)^3}{(E(X - \mu)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (1)$$

Donde  $E$  es la esperanza matemática de la variable aleatoria  $X$ ,  $\mu$  es la media y  $\sigma$  desviación estándar de la población.

### 2.2. Coeficiente de agudez

Se define como el cuarto momento de una de una distribución de probabilidad respecto de la media, cuya ecuación es [3]:

$$\beta_2 = \frac{E(X - \mu)^4}{(E(X - \mu)^2)^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (2)$$

Este coeficiente mide agudeza de la distribución y permite saber cuándo una distribución se desvía de la curva normal estándar.

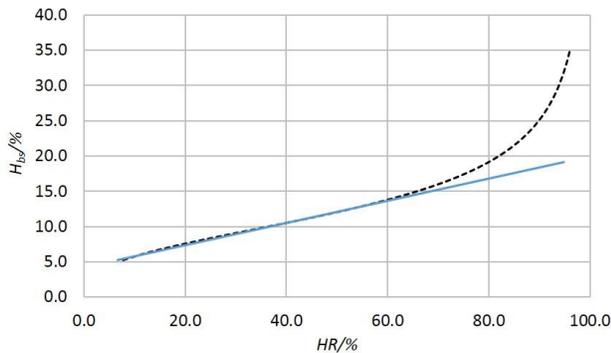
De acuerdo a [2], la propagación de incertidumbre mediante la expansión de la serie de Taylor a segundo orden se puede escribir en términos de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  mediante la ecuación (3).

$$\sigma^2_y = \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \sigma^2(x) + \frac{1}{4} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \sigma^4(x) [\beta_2 - 1] + [\beta_1] \sigma^3(x) \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3}$$

De esta ecuación se observa que los coeficientes de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  dan información sobre la no linealidad de un modelo de medición.

### 3. RESULTADOS

Considere el caso de un isoterma de sorción que relaciona el contenido de humedad de un material sólido ( $H_{bs}$ ) en equilibrio con una atmósfera de humedad relativa ( $HR$ ), como se muestra en la Figura 1.



**Fig. 1.** Isoterma de sorción para una muestra de trigo rojo duro.

En la Figura 1 se observa que el modelo del isoterma de sorción es aproximadamente lineal hasta aproximadamente 80 %HR, pero a valores mayores se presenta una marcada desviación de la linealidad.

Se usó el isoterma de sorción de la Figura 1 para estimar los coeficientes de asimetría y curtosis, así como la incertidumbre del modelo. Esta última estimación se realizó con la GUM ( $u_{GUM}$ ) y por el método de Monte Carlo ( $u_{MC}$ ) [4]. Para la aplicación del método de Monte Carlo se generaron 100000 números semialeatorios que se obtuvieron con un software comercial. En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos.

En la Tabla 1 se observa que existe una correlación entre la no linealidad del modelo y los coeficientes de forma (asimetría y curtosis), lo que tiene implicaciones en la estimación de la incertidumbre. Se observa que en la parte no lineal el método de la GUM a primer orden no es recomendable.

**Tabla 1. Resultados.**

HR/%	$H_{bs}/%$	$u_{GUM}/%$	$u_{MC}/%$	$\beta_1$	$\beta_2$
20	7.4	1.76	1.76	0.00	0.00
80	18.7	1.79	1.79	0.00	0.00
90	24.5	1.97	1.97	0.04	0.02
91	25.5	2.03	2.03	0.06	0.04
92	26.6	2.12	2.13	0.10	0.08
93	27.9	2.25	2.28	0.17	0.18
94	29.5	2.46	2.53	0.29	0.43
95	31.5	2.81	2.97	0.57	1.44

Adicionalmente, se obtuvo el histograma de frecuencias a 95 %HR y se confirma la asimetría estimada con los coeficientes estadísticos de forma calculados.

### 4. CONCLUSIONES

Se encontró que los coeficientes estadísticos de forma (asimetría y curtosis) dan información de la no linealidad del modelo de medición. Se calcularon dichos coeficientes para un isoterma de sorción que tiene un intervalo donde se desvía de la linealidad.

Se muestra que al estimar la incertidumbre del modelo con el método de la GUM se puede subestimar su valor. En casos de modelos no lineales es más apropiado usar un método alternativo como es el método de Monte Carlo.

### REFERENCIAS

- [1] JCGM100:2008, GUM 1995 with minor corrections, Evaluation of measurement data- Guide to the expression of uncertainty in measurement, first edition September 2008, © JCGM2008.
- [2] A. Yegnan, D.G. Williamson, A.J. Graettinger "Uncertainty analysis in air dispersion modelling", Environmental Modelling & Software, vol. 17, pag. 639-649, 2002.
- [3] T. D. Lawrence, "On the meaning and use of Kurtosis", Environmental Modelling & Software, vol. 2 (3), pag. 292-3079, 1997.
- [4] Joint Committee for Guides in Metrology. Evaluation of Measurement Data- Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty of Measurement"- Propagation of Distributions using Monte Carlo Method, JCGM 101:2008.