EJERCICIO DE CALCULO DE INCERTIDUMBRE APLICADO A LA LEY DE OHM

O. Gutiérrez
CENAM, Laboratorio Multifunciones
km 4,5 Carretera a los Cués El Marqués Qro
Tel. 01 42 11 05 00, Fax 01 42 11 15 38, ogutierr@cenam.mx

Resumen: En los laboratorios de calibración del área eléctrica del país comúnmente se realizan mediciones indirectas con base en la Ley de Ohm, aunque su cálculo de incertidumbre asociado es relativamente sencillo, representa un número significativo de horas hombre, el método presentado en este documento pretende hacer más eficiente esta tarea, pero sobre todo, busca promover que dicho cálculo se realimente al proceso de medición.

INTRODUCCION

Cuando se lee el resumen del método para la evaluación y expresión de la incertidumbre que propone la Guía BIMP [1] se encuentra que el primer paso es expresar matemáticamente la relación entre el mensurando y los argumentos, tratándose de una medición indirecta con base en la Ley de Ohm resulta clara la formalización ya que normalmente no están involucradas magnitudes de influencia y las magnitudes de definición están relacionadas por operaciones básicas (suma, resta, división o multiplicación). En estos casos se presentan dos alternativas para realizar el cálculo de incertidumbre: la primera es manejar las componentes y resultados de manera absoluta, en otras palabras en las unidades de que se trate (A, Ω ó V) o la segunda en forma relativa al valor de interés (%, ppm, mUnidades/Unidades o µUnidades/Unidades).

Ambas alternativas conducen a los mismos resultados, sin embargo el manejar las componentes en forma absoluta (A, Ω ó V) triplica el tiempo invertido en respecto al involucrado cuando se tratan de forma relativa, esta diferencia se agudiza a medida que se involucran mas elementos como son: aplicación de los certificados de calibración, correcciones por estabilidad, linealidad o potencia disipada.

Cuando se maneja grandes conjuntos de datos como en la calibración de un equipo multifunción, resulta crítico la manipulación de la información, por ende es muy recomendable trabajar con modelos sintetizados y manejar cantidades relativas respecto a valores nominales en vez de lecturas directas. Este ejercicio está orientado de esta forma y es el resumen de la experiencia de calibrar calibradores y multímetros de alta exactitud.

DESARROLLO

Se desea calcular la incertidumbre en la medición de la Intensidad de c.c. generada por una fuente, para lo cual se utiliza un derivador colocado a su salida y se mide la caída de tensión a través de un vóltmetro.
El diagrama eléctrico es el siguiente:

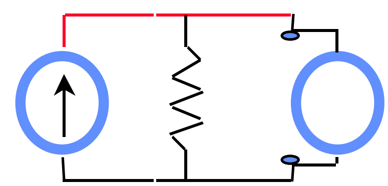


Figura 1 diagrama eléctrico

En primer termino se define el mensurando como la intensidad de c.c. a la salida de la fuente y el proceso de medición se formaliza a través de la siguiente expresión:

$$I = \frac{V}{R} \qquad (1)$$

Donde:

- I es la Intensidad de c.c. a la salida de la fuente
- R es el valor del derivador
- V es la caída de tensión medida con el vóltmetro

Despejando (1) se tiene que

$$R = \frac{V}{I} \qquad (2)$$

$$V = RI \qquad (3)$$

A continuación se calculan los coeficientes de sensibilidad derivando (1) en función de sus componentes y se simplifican a través de (2) y (3).

$$\frac{\partial I}{\partial V}=\frac{1}{R}=\frac{1}{V/I}=\frac{I}{V}$$

$$\frac{\partial I}{\partial R}=-\frac{V}{R^2}=-\frac{RI}{R^2}=-\frac{I}{R}$$

Se asumen Funciones de Distribución de Probabilidad (FDP) para cada una de las componentes con base en la información disponible y se determina una FDP resultante de su convolución, la cuál será asociada al mensurando.

Usualmente en estos procesos de convolución se satisface el teorema de límite central que establece que: *"La distribución de probabilidad del mensurando Y será aproximadamente Normal si las magnitudes de definición X_i del mensurando son independientes entre sí, y si la varianza del mensurando $s^2(Y)$ es mucho mayor que la varianza de cualquier magnitud de definición $s^2(X_i)$ que no sea Normal"* [1].

La incertidumbre estándar combinada está dada por la siguiente expresión:

$$u_c^2(I)=\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)^2 u^2(V)+\left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 u^2(R)$$

$$u_c^2(I)=\left(\frac{I}{V}\right)^2 u^2(V)+\left(-\frac{I}{R}\right)^2 u^2(R)$$

Manipulando la expresión anterior queda como:

$$u_c^2(I)=\frac{I^2}{V^2}*u^2(V)+\frac{I^2}{R^2}*u^2(R)$$

$$\frac{u_c^2(I)}{I^2}=\frac{u^2(V)}{V^2}*+\frac{u^2(R)}{R^2}$$

$$\left(\frac{u_c(I)}{I}\right)^2=\left(\frac{u(V)}{V}\right)^2+\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(10^6)^2$ se tiene:

$$\left(\frac{u_c(I)*10^6}{I}\right)^2=\left(\frac{u(V)*10^6}{V}\right)^2+\left(\frac{u(R)*10^6}{R}\right)^2$$

Las incertidumbres quedan expresadas en forma relativa a la lectura y por lo tanto puede escribirse como:

$$u^2_{c(mA/A)}(I)=u^2_{mV/V}(V)+u^2_{m\Omega/\Omega}(R) \qquad (4)$$

Se observa en la expresión anterior que el manejo de las componentes de incertidumbre en forma relativa implica que los coeficientes de sensibilidad sean unitarios y por tanto ambas magnitudes tengan la misma ponderación. La expresión (4) puede acomodarse para Tensión y Resistencia Eléctrica y es igualmente válida.

$$u^2_{c(m\Omega/\Omega)}(R)=u^2_{mV/V}(V)+u^2_{mA/A}(I)$$

$$u^2_{c(mV/V)}(V)=u^2_{mA/A}(I)+u^2_{m\Omega/\Omega}(R)$$

Ahora en el contexto de una calibración el mensurando es el error relativo de la fuente y la formalización está dada por:

$$E=\left(\frac{L-I}{I}\right)*10^6 \qquad (5)$$

Donde:

- L es el valor seleccionado en la fuente.
- I es el valor medido a través de derivador y el vóltmetro, el cual se calcula con base en la expresión (1)

Con la finalidad de facilitar la aplicación de los informes de calibración, las correcciones por estabilidad, linealidad y potencia disipada se manipula la expresión (5) para ponerla en términos de valores relativos partiendo de las tres consideraciones siguientes:

a) La lectura del vóltmetro "V_{simple}" se corrige a partir de su informe de calibración aplicando la siguiente expresión general:

$$V_{corregida}=\frac{V_{simple}}{(1+E'_V)} \qquad (6)$$

la cual proviene de la fórmula del error relativo y donde, para facilitar el desarrollo, se utiliza la siguiente notación:

$$E'_V=\frac{E_V}{10^6} \qquad (7)$$

El valor E_V es el error relativo del vóltmetro reportado en su informe de calibración.

b) La lectura del vóltmetro puede expresarse en términos relativos como:

$$\ddot{A}_V = \left[\frac{med_V - nom_V}{nom_V}\right] * 10^6 \qquad (8)$$

Donde *nom*$_V$ es la caída de tensión nominal que se espera en el derivador y med$_V$ es la indicación del vóltmetro Entonces despejando med$_V$ en (8) se tiene:

$$nom_V * \left(1 + \ddot{A}'_V\right) = med_V \qquad (9)$$

c) Por último el valor de resistencia eléctrica de un derivador de corriente puede expresarse en términos relativos como:

$$\ddot{A}_R = \left[\frac{nom_R - R}{R}\right] * 10^6 \qquad (10)$$

Donde *nom*$_R$ es el valor nominal de resistencia eléctrica del derivador de corriente y "R" es su valor real. Entonces despejando "R" en (10) se tiene:

$$R = \frac{nom_R}{1 + \ddot{A}'_R} \qquad (11)$$

Sustituyendo (6), (9) y (11) en (1):

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\dfrac{med_V}{\left(1+E'_V\right)}}{\dfrac{nom_R}{\left(1+\ddot{A}'_R\right)}} = \frac{\dfrac{nom_V * \left(1+\ddot{A}'_V\right)}{\left(1+E'_V\right)}}{\dfrac{nom_R}{\left(1+\ddot{A}'_R\right)}}$$

Desarrollando se tiene:

$$I = \left[\frac{nom_V}{nom_R}\right] * \frac{\left(1+\ddot{A}'_V\right)\left(1+\ddot{A}'_R\right)}{\left(1+E'_V\right)}$$

$$I = \left[\frac{nom_V}{nom_R}\right] * \frac{\left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R + \ddot{A}'_V\ddot{A}'_R\right)}{\left(1+E'_V\right)} \qquad (12)$$

Sí se cumple que:

$$\frac{nom_V}{nom_R} = nom_I \quad y \quad \ddot{A}'_V\ddot{A}'_R \;\langle\langle\; \ddot{A}'_V \approx \ddot{A}'_R$$

Entonces (12) queda como:

$$I = nom_I * \frac{\left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R\right)}{\left(1+E'_V\right)}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 1 resulta que:

$$I = nom_I * \frac{\left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R\right)}{\left(1+E'_V\right)} * \frac{\left(1-E'_V\right)}{\left(1-E'_V\right)}$$

$$I = nom_I * \frac{\left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V - \ddot{A}'_V E'_V - \ddot{A}'_R E'_V\right)}{\left(1-\left(E'_V\right)^2\right)}$$

Como:

$$\left(E'_V\right)^2 \langle\langle 1 \quad y \quad \ddot{A}'_V \approx \ddot{A}'_R \approx E'_V \;\rangle\rangle\; \ddot{A}'_V E'_V \approx \ddot{A}'_R E'_V$$

Entonces se tiene que:

$$I = nom_I * \left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right) \qquad (13)$$

Sustituyendo (13) en (5)

$$E_I = \left(\frac{L - nom_I * \left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right)}{nom_I * \left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right)}\right) * 10^6 \qquad (14)$$

"L" es la selección en la fuente y por lo tanto es igual al valor nominal de Intensidad de c.c. "nom$_{I,}$" además en el denominador se puede hacer la siguiente simplificación:

$$nom_I * \left(1+\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right) = nom_I$$

Entonces (14) queda como:

$$E_I = \left(\frac{\left(L - nom_I\right) - nom_I * \left(\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right)}{nom_I}\right) * 10^6$$

Simplificando se tiene que:

$$E_I = -\left(\ddot{A}'_V + \ddot{A}'_R - E'_V\right) * 10^6$$

Con base en la expresión (7) queda como:

$$E_I = -\left(\ddot{A}_V + \ddot{A}_R - E_V\right) \qquad (15)$$

La aplicación de la expresión (15) reduce al cálculo a una suma de cantidades sencillas en partes por millón "ppm" o porcentajes:

$$E_I = -\left(5{,}2\,ppm + 4{,}1ppm - 2{,}1ppm\right) = -7{,}2\,ppm$$

Hasta este punto solo se ha manipulado la formalización del proceso de medición, ahora se calcularán los coeficientes de sensibilidad derivando el mensurando "E_I" respecto a cada componente.

$$\frac{\partial E_I}{\partial \Delta_V} = -1 \qquad \frac{\partial E_I}{\partial \Delta_R} = -1 \qquad \frac{\partial E_I}{\partial E_V} = 1$$

Paso seguido se calcula la incertidumbre estándar combina con base en la siguiente expresión:

$$u_c(E_I) = \sqrt{\left(\frac{\partial E_I}{\partial \Delta_V}\right)^2 u^2(\text{Ä}_V) + \left(\frac{\partial E_I}{\partial \Delta_R}\right)^2 u^2(\text{Ä}_R) + \left(\frac{\partial E_I}{\partial E_V}\right)^2 u^2(E_V)}$$

$$u_c(E_I) = \sqrt{(-1)^2 u^2(\text{Ä}_V) + (-1)^2 u^2(\text{Ä}_R) + (1)^2 u^2(E_V)}$$

$$u_c(E_I) = \sqrt{u^2(\text{Ä}_V) + u^2(\text{Ä}_R) + u^2(E_V)} \qquad (16)$$

A continuación de estima la incertidumbre estándar de cada una de las componentes:

a) Para $u^2(\Delta_V)$ se tiene:

$$u^2(\text{Ä}_V) = \left(\frac{rsl_{V(ppm)}}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{s_{V(ppm)}}{\sqrt{n}}\right)^2 \qquad (17)$$

La primer parte corresponde a la resolución del Vóltmetro y es tratada como una Función de Distribución de Probabilidad (FDP) rectangular, la segunda es debida a la variabilidad de las lecturas del mismo instrumento y es evaluada como tipo "A" donde "n" es el número de mediciones, ambas expresadas en forma relativa.

b) Para $u^2(\rho)$ se tiene:

$$u^2(\text{Ä}_R) = \left(\frac{u_{cal}(R)}{k_{cal}}\right)^2 + \left(\frac{u_{est}(R)}{k_{est}}\right)^2 + \left(\frac{u_{pot}(R)}{k_{pot}}\right)^2 \qquad (18)$$

La primer parte corresponde a la incertidumbre de calibración del derivador, la siguiente a su estabilidad y la última es debida a la diferencia de la intensidad de prueba con la que fue calibrado respecto a la que se desea medir en el momento de uso. Los denominadores denotados con la letra "k" corresponden al factor de cobertura al que están reportados cada una de las componentes.

c) Para $u^2(E_V)$ se tiene:

$$u^2(E_V) = \left(\frac{u_{cal}(E_V)}{k_{cal}}\right)^2 + \left(\frac{u_{est}(E_V)}{k_{est}}\right)^2 + \left(\frac{u_{lin}(E_V)}{k_{lin}}\right)^2 \qquad (19)$$

La primer parte corresponde a la incertidumbre de calibración del Vóltmetro, la siguiente a su estabilidad y la última es debida a la linealidad si es que la caída de tensión medida con el Vóltmetro al momento de uso es diferente al punto en que fue calibrado.

Sustituyendo expresiones (17), (18) y (19) en (16)

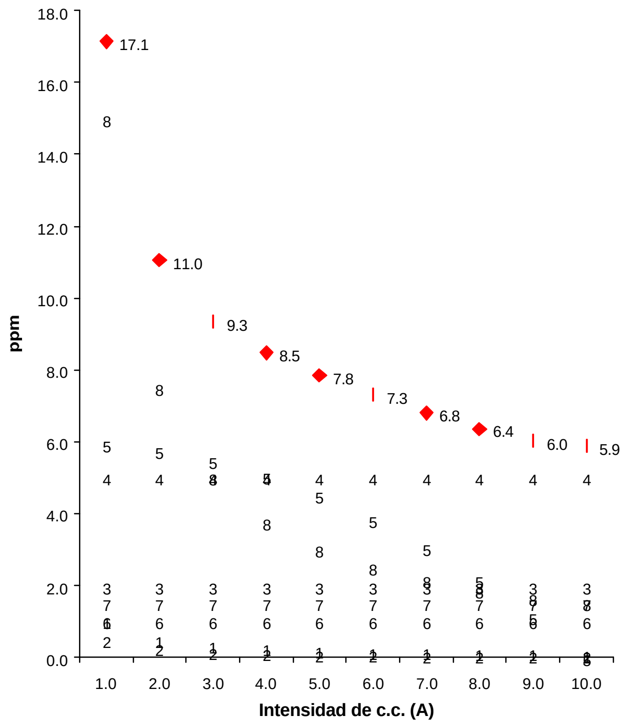
$$u^2(E_I) = \left(\frac{rsl_{V(ppm)}}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{s_{V(ppm)}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{u_{cal}(R)}{k_{cal}}\right)^2 + \left(\frac{u_{est}(R)}{k_{est}}\right)^2 + \left(\frac{u_{pot}(R)}{k_{pot}}\right)^2 + \left(\frac{u_{cal}(E_V)}{k_{cal}}\right)^2 + \left(\frac{u_{est}(E_V)}{k_{est}}\right)^2 + \left(\frac{u_{lin}(E_V)}{k_{lin}}\right)^2$$

A continuación se presenta un ejercicio práctico donde se mide una fuente que genera desde 1 a 10 A y se asignan valores para cada una de las componentes identificadas en la expresión anterior.

Intensidad de c.c. (A)	$u_{rsl}(\Delta_V)$ ppm	$u_{tipoA}(\Delta_V)$ ppm	$u_{cal}(\Delta_R)$ ppm	$u_{est}(\Delta_R)$ ppm	$u_{pot}(\Delta_R)$ μΩ/Ω ppm	$u_{cal}(E_V)$ ppm	$u_{est}(E_V)$ ppm	$u_{lin}(E_V)$ ppm	$u_c(I)$ ppm
clave	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	
1	1.0	0.5	2.0	5.0	5.9	1.0	1.5	15	17.1
2	0.5	0.3	2.0	5.0	5.8	1.0	1.5	7.5	11.0
3	0.3	0.2	2.0	5.0	5.5	1.0	1.5	5.0	9.3
4	0.3	0.1	2.0	5.0	5.0	1.0	1.5	3.8	8.5
5	0.2	0.1	2.0	5.0	4.5	1.0	1.5	3.0	7.8
6	0.2	0.1	2.0	5.0	3.8	1.0	1.5	2.5	7.3
7	0.1	0.1	2.0	5.0	3.1	1.0	1.5	2.1	6.8
8	0.1	0.1	2.0	5.0	2.2	1.0	1.5	1.9	6.4
9	0.1	0.1	2.0	5.0	1.1	1.0	1.5	1.7	6.0
10	0.1	0.1	2.0	5.0	0.0	1.0	1.5	1.5	5.9

Tabla 1 componentes de incertidumbre iniciales

Para cada una de las componentes se asigna una clave con la que se identifican en la gráfica siguiente:



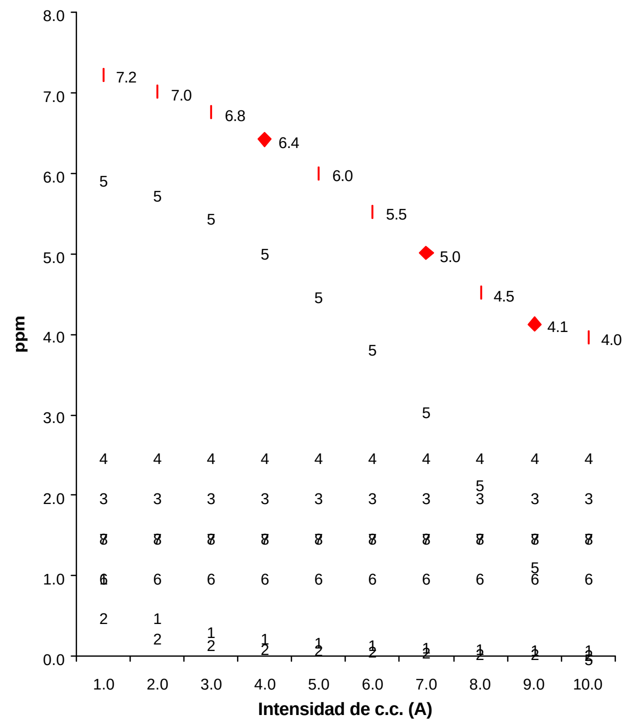
Gráfica 1 componentes de incertidumbre iniciales

De la gráfica se puede observar que para valores bajos de intensidad de corriente la componente principal es debida a la linealidad del vóltmetro (clave 8) y para valores altos es la debida a la estabilidad del derivador (clave 4). Entonces resulta dos acciones de mejora al sistema de medición, en primer término se calibrará el vóltmetro en la parte baja del intervalo para disminuir la componente por linealidad, la segunda acción es poner bajo seguimiento metrológico al derivador para disminuir la incertidumbre por estabilidad, aplicando ambas correcciones los nuevos valores de la tabla serían:

Intensidad de c.c. (A)	$u_{rsl}(\Delta_V)$ ppm	$u_{tipoA}(\Delta_V)$ ppm	$u_{cal}(\Delta_R)$ ppm	$u_{est}(\Delta_R)$ ppm	$u_{pot}(\Delta_R)$ µΩ/Ω ppm	$u_{cal}(E_V)$ ppm	$u_{est}(E_V)$ ppm	$u_{lin}(E_V)$ ppm	$u_c(I)$ ppm
clave	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	
1	1.0	0.5	2.0	**2.5**	5.9	1.0	1.5	**1.5**	7.2
2	0.5	0.3	2.0	**2.5**	5.8	1.0	1.5	**1.5**	7.0
3	0.3	0.2	2.0	**2.5**	5.5	1.0	1.5	**1.5**	6.8
4	0.3	0.1	2.0	**2.5**	5.0	1.0	1.5	**1.5**	6.4
5	0.2	0.1	2.0	**2.5**	4.5	1.0	1.5	**1.5**	6.0
6	0.2	0.1	2.0	**2.5**	3.8	1.0	1.5	**1.5**	5.5
7	0.1	0.1	2.0	**2.5**	3.1	1.0	1.5	**1.5**	5.0
8	0.1	0.1	2.0	**2.5**	2.2	1.0	1.5	**1.5**	4.5
9	0.1	0.1	2.0	**2.5**	1.1	1.0	1.5	**1.5**	4.1
10	0.1	0.1	2.0	**2.5**	0.0	1.0	1.5	**1.5**	4.0

Tabla 2 componentes de incertidumbre finales

La gráfica entonces queda como se muestra a continuación.



Gráfica 2 componentes de incertidumbre finales

En esta gráfica se observa la "penalización" en incertidumbre que se paga por utilizar el derivador a una intensidad diferente a la que fue calibrado.

Es pertinente mencionar que debe existir una razón clara porque reducir la incertidumbre, dicha razón debe ser fundada en las necesidades de un proceso o sistema y no solo motivada por la búsqueda del conocimiento por sí mismo. El mejor sistema de medición es aquel que satisface la necesidad de manera eficiente y no siempre es el de menor incertidumbre asociada.

La incertidumbre no es el enemigo a vencer sino la brújula del metrólogo que lo orienta en su tarea diaria.

CONCLUSIONES

El expresar las componentes de incertidumbre en forma relativa a la lectura facilita la estimación de incertidumbre y su realimentación al proceso de medición.

REFERENCIAS

[1] Guía BIPM/ISO Para la Expresión de la Incertidumbre en las Mediciones, 1990.