DETERMINACIÓN DE UN COEFICIENTE CON COMPORTAMIENTO DE SEGUNDO ORDEN Y SU INCERTIDUMBRE

E. Rivera, J. Moreno
CENAM, Laboratorio de Resistencia Eléctrica, CP 76241
Dirección de Metrología Eléctrica
(4) 2 11 05 00, (4) 2 11 05 48, erivera@cenam.mx

Resumen: En el CENAM las calibraciones de resistores patrón están referidas a un resistor con valor nominal de 10 kΩ, el cual es trazable al Efecto Hall cuántico reproducido en el CENAM. Dado que este resistor se encuentra a temperatura ambiente es necesario realizar correcciones para transferir adecuadamente su valor. El valor del resistor cambia con la temperatura siguiendo una ecuación de segundo orden. Se presenta la técnica de medición con la cual se propone calcular los coeficientes de temperatura que definen el comportamiento del resistor con la temperatura y su incertidumbre.

INTRODUCCION

Las calibraciones de resistores patrón en el CENAM, están referidas a un resistor con valor nominal de 10 kΩ, el cual es calibrado con el Efecto Hall cuántico reproducido en el CENAM [1].

Este tipo de resistores (Rs) se encuentran dentro de una masa térmica sellada herméticamente junto con un termómetro de resistencia (RT) tal como se muestra en la figura 1. RT tiene valor nominal de 10 kΩ y coeficiente de temperatura de 1 (mΩ/Ω)/°C [2], .

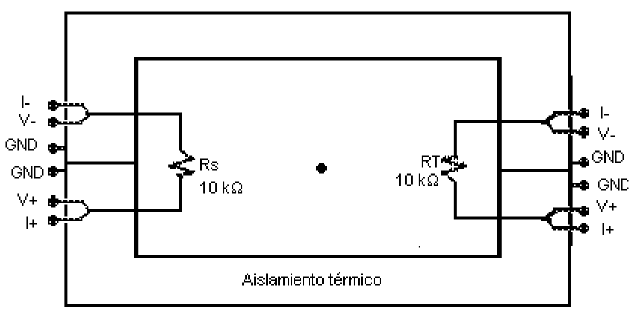

Fig.1 Resistor patrón de 10 kΩ

Rs es calibrado a una temperatura de 23 °C. La temperatura del resistor puede ser distinta de 23 °C cuando éste es usado como patrón de referencia, por ello se deben realizar las correcciones necesarias para realizar una correcta transferencia de su valor.

Se sabe que Rs cambia con la temperatura siguiendo una ecuación de segundo orden, tal como se expresa en la siguiente ecuación [2]:

$$Rs=R_{23}(1+\alpha\Delta T+\beta\Delta T^2) \qquad (1)$$

$$\Delta T= (T-23)\ °C \qquad (2)$$

donde:

Rs: Valor del resistor a la temperatura T
R_{23}: Valor del resistor a 23 °C
α y β: Coeficientes de temperatura
T: Temperatura del resistor

Para poder realizar las correcciones necesarias al valor de Rs, se requiere conocer el valor de los coeficientes α y β, los cuales se determinan con la técnica de medición que se presenta a continuación.

TÉCNICA DE MEDICIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TEMPERATURA

Para determinar el cambio de Rs con respecto a la temperatura se usó un sistema de medición formado por un puente comparador de corrientes y un resistor (Rc) colocado en un baño de aceite a una temperatura de (25,00 ± 0,01) °C.

El puente comparador de corrientes mide la relación r existente entre dos resistores R_1 y R_2 con resolución de 10^{-9}.

$$r = R_1/ R_2 \qquad (3)$$

Para este caso en particular, se desea conocer la relación:

$$Rs/ R_{23}= 1+\alpha\Delta T+\beta\Delta T^2 \qquad (4)$$

R_{23} no es función de α, β y ΔT, y puede tomar cualquier valor, por ello es posible asignarle un valor convencional de 10 kΩ, el cual es asignado también a Rc. De esta manera, la ecuación (3) se puede expresar en términos de Rs y Rc:

$$r = Rs / Rc = 1 + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 \qquad (5)$$

La relación r se midió sometiendo a Rs a 18 °C, 20 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C y 28 °C. Para cada temperatura se realizaron tres mediciones. La temperatura de Rs se midió por medio de su termómetro de resistencia RT. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Resumen de mediciones

Temperatura de Rs* (°C)	ΔT* (°C)	r ± u(r)
18,04	-4,96	1,000 000 386 ± 67×10^{-9}
20,02	-2,98	1,000 000 721 ± 73×10^{-9}
21,96	-1,04	1,000 000 826 ± 26×10^{-9}
22,92	-0,08	1,000 000 751 ± 26×10^{-9}
23,90	0,90	1,000 000 710 ± 45×10^{-9}
25,86	2,86	1,000 000 465 ± 54×10^{-9}
27,82	4,82	1,000 000 054 ± 42×10^{-9}

*La incertidumbre estándar u(ΔT) es en todos los casos de ± 0,01 °C.

A las mediciones de r se ajustó una curva de segundo orden por el método de mínimos cuadrados [3], cuyos coeficientes α y β son:

$$\alpha = -36 \times 10^{-9} \ 1/°C$$

$$\beta = -23 \times 10^{-9} \ 1/°C^2$$

En la figura 2 se muestra la gráfica de las mediciones de r y la curva ajustada.

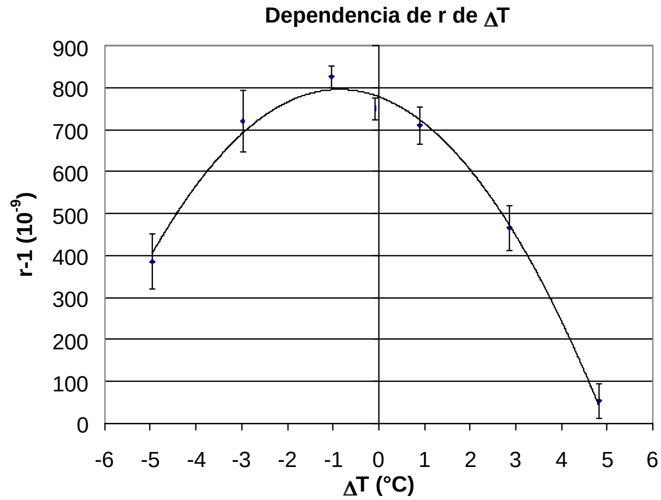

Fig. 2 Dependencia de r de ΔT

PROPUESTA PARA ESTIMAR LA INCERTIDUMBRE DE LOS COEFICIENTES DE TEMPERATURA

Para el cálculo de los coeficientes α y β fueron empleadas las mediciones de la relación r y de ΔT, las cuales tienen sus respectivas incertidumbres estándar $u(r_i)$ y $u(\Delta T_i)$.

Los datos se ajustaron a la ecuación:

$$r = 1 + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 \qquad (6)$$

Empleando el método de mínimos cuadrados [3], los coeficientes α y β se encuentran dentro de una matriz solución $\hat{}$, la cual es función de una matriz $\hat{\Delta}$ que contiene las mediciones $\Delta T_1, \Delta T_2 \ldots \Delta T_7$, y de la matriz $\hat{r}$ que contiene las mediciones de $r_1, r_2 \ldots r_7$.

$$\hat{} = \begin{bmatrix} 1 \\ Æ \\ â \end{bmatrix} = \left(\text{Ã}'\text{Ã}\right)^{-1}\text{Ã}'\hat{r} \qquad (7)$$

donde:

$$\hat{\text{Ã}} = \begin{bmatrix} 1 & \text{Ä}T_1 & \text{Ä}T_1^2 \\ 1 & \text{Ä}T_2 & \text{Ä}T_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{Ä}T_7 & \text{Ä}T_7^2 \end{bmatrix} \qquad \hat{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_7 \end{bmatrix} \qquad (8), (9)$$

Por lo tanto, los mensurandos α y β son función de las mediciones de r y de ΔT:

$$\alpha(R_1, R_2 \ldots R_7, \Delta T_1, \Delta T_2 \ldots \Delta T_7) \tag{10}$$

$$\beta(R_1, R_2 \ldots R_7, \Delta T_1, \Delta T_2 \ldots \Delta T_7) \tag{11}$$

Con base en la "Guía BIPM/ISO para la expresión de la incertidumbre en las mediciones", la expresión de incertidumbre estándar de α es:

$$u(a) = \left[s(a)^2 + \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial a}{\partial r_i} u(r_i) \right)^2 + \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial a}{\partial \Delta T_i} u\left(\Delta T_i\right) \right)^2 \right]^{1/2} \tag{12}$$

La expresión de incertidumbre estándar de β es similar a la ecuación (12), así como la evaluación de todas sus componentes de incertidumbre, por lo cual se presenta sólo el proceso de evaluación propuesto para u(α).

En la ecuación (12), s(α) es la desviación estándar del coeficiente α, y que representa la dispersión de los puntos con respecto a la curva de ajuste, ésta se obtiene a partir de los elementos C_{ii} de la matriz de varianzas y covarianzas $\hat{v}$ y las matrices $\hat{r}$, $\hat{g}$ y $\hat{\Delta}$:

$$s(\hat{\alpha}) = \left(\frac{\hat{r}'\hat{r} - \hat{a}'\hat{\Delta}\hat{r}}{4} \cdot C_{ii} \right)^{1/2} \tag{13}$$

$$\hat{v} = \left(\hat{\Delta}'\hat{\Delta}\right)^{-1} \tag{14}$$

Dado que $u(r_i)$ y $u(\Delta T_i)$ son conocidas, queda por calcular los coeficientes de sensibilidad $\frac{\partial a}{\partial r_i}$ y $\frac{\partial a}{\partial T_i}$.

La manipulación matemática de los mensurandos α y β para encontrar los coeficientes de sensibilidad matricialmente puede resultar complicado, es por ello que se propone su estimación numérica.

Por definición, la derivada parcial de una función de dos variables con respecto a una de ellas, mientras la otra permanece constante es [5]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x} \right) \tag{15}$$

entonces, es posible conocer los coeficientes de sensibilidad evaluando el cambio numérico que tiene el coeficiente α, llamado Δα, cuando se provoca un cambio numérico δ en una de las variables mientras las demás conservan su valor:

$$\frac{\partial a}{\partial r_i} = \frac{\Delta a}{dr_i} \qquad y \qquad \frac{\partial a}{\partial \Delta T_i} = \frac{\Delta a}{d\Delta T_i} \tag{16}$$

Si $\delta r_i = u(r_i)$ y $\delta T_i = u(\Delta T_i)$, la ecuación (12) se reduce a:

$$u(a) = \left[s(a)^2 + \sum_{i=1}^{7} \Delta a\,(r_i)^2 + \Delta a\left(\Delta Ti\right)^2 \right]^{1/2} \tag{17}$$

donde $\Delta\alpha(r_i)$ es el cambio del coeficiente α con respecto a δr_i mientras las demás variables conservan su valor, y $\Delta\alpha(T_i)$ es el cambio del coeficiente α con respecto a δT_i mientras las demás variables conservan su valor.

En nuestro caso, al evaluar las componentes de incertidumbre con la propuesta presentada, obtenemos los resultados que se presentan en la tabla 2, donde se aprecia que la componente debida a la incertidumbre de las mediciones de r y a la falta de ajuste son las componentes de mayor peso, y es posible despreciar las componentes debidas a las mediciones de ΔT.

Tabla 2 Evaluación de las componentes de incertidumbre para α y β.

Componentes de incertidumbre	α (1/°C)	β (1/°C^2)
s	$1{,}7 \times 10^{-9}$	$0{,}5 \times 10^{-9}$
$\Delta(r_i)$	$6{,}8 \times 10^{-9}$	$1{,}9 \times 10^{-9}$
$\Delta(T_i)$	$0{,}3 \times 10^{-9}$	$0{,}1 \times 10^{-9}$

El valor de los coeficientes α y β y su respectiva incertidumbre estándar es:

$$\alpha = (-40 \pm 7)\mathrm{x}10^{-9}\ 1/°\mathrm{C}$$

$$\beta = (-23 \pm 2)\mathrm{x}10^{-9}\ 1/°\mathrm{C}^{2}$$

Durante el proceso de calibración de resistores patrón, la temperatura de Rs es medida con una incertidumbre de ± 0,03 °C, considerando que el coeficiente de sensibilidad de r con respecto de ΔT es:

$$\frac{\partial r}{\partial \Delta T} = \alpha + 2\beta\Delta T \qquad (18)$$

la componente de incertidumbre relativa debida a las correcciones por temperatura es de 3 nΩ/Ω, en el caso de que ΔT = 1 °C, que es el peor de los casos.

CONCLUSIONES

Se logró la determinación de los coeficientes de temperatura de un resistor de 10 kΩ y su incertidumbre asociada con la propuesta presentada.

Mediante los resultados obtenidos se concluye que la contribución de incertidumbre relativa de α y β a la incertidumbre total de los servicios de calibración es mínima comparada con la del sistema de transferencia que es de ±0,1 μΩ/Ω, por lo tanto es posible despreciar ésta contribución.

Sin embargo, el sistema de transferencia del Efecto Hall Cuántico tiene una incertidumbre relativa típicamente menor a 50 nΩ/Ω, y considerando un caso extremo, donde la estabilidad de la temperatura fuera del orden de 0,5 °C, se obtiene una contribución de incertidumbre relativa de 20 nΩ/Ω por temperatura, lo cual representa un poco menos de la mitad de la incertidumbre del sistema de transferencia. Por ello será importante emplear un baño de aceite con temperatura controlada para reducir esta contribución, si se llegará a presentar un caso extremo como el descrito.

Existen normas que intentan estimar la incertidumbre de los coeficientes de la ecuación resultante del ajuste polinomial de datos por el método de mínimos cuadrados, con base en la desviación estándar de los coeficientes obtenida de la matriz de varianzas y covarianzas exclusivamente. El método aquí propuesto incluye adicionalmente la contribución de las mediciones, que es una de las componentes más importantes en la estimación de la incertidumbre de tales coeficientes.

REFERENCIAS

[1]. F. Hernández, M.A. Escobar, C. Sánchez, D. Avilés, Reproduction of the ohm based on the Quantum Hall Efect at CENAM, CPEM 98 Conference Digest, July 1998, Washington DC, USA.

[2]. ESI, Instruction Manual Model SR104 Transportable Standard resistor, October 1972.

[3]. Mary G. Natrella, Experimental Statistics Handbook 91, United States Department of Commerce Technology Administration National Institute of Standards and Technology, October 1966.

[4]. BIPM/ISO, Guide to the expression of uncertainty in measurement, 1993.

[5]. Arnulfo Andrade D, Pablo García Colomé, Cálculo diferencial e integral, Programa del libro de texto universitario, 1984.