ALTERNATIVAS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS DE MEDICIÓN EN MÁQUINAS DE MEDICIÓN POR COORDENADAS

E. Arizmendi, C. Galván, G. Navarrete.
Centro Nacional de Metrología, División de Metrología Dimensional
Dirección
Tel: (4) 2 11 05 00 ext. 3282, fax: (4) 2 11 05 77, email earizmen@cenam.mx

Resumen: Una parte esencial de una Máquina de Medición por Coordenadas (MMC) es el software de medición, de él depende en gran parte lo que la máquina pueda medir, sin embargo, los softwares comerciales de medición que emplean las MMC tiene grandes limitaciones en cuanto al cálculo y parametrización de ciertos elementos geométricos, lo cual dificulta o imposibilita en algunas ocasiones resolver ciertos problemas de medición, el presente trabajo describe, a través de ejemplos, cómo abordar este tipo de problemas y cómo, a partir de la información obtenida de una MMC y con ayuda de herramientas matemáticas como el cálculo y la geometría analítica se pueden resolver aumentando así la versatilidad de las MMC. Además, pretende ser una guía para el análisis y solución a ciertos problemas de medición que no pueden ser resueltos con softwares típicos de máquinas de medición por coordenadas.

INTRODUCCIÓN

Las Máquinas de Medición por Coordenadas (MMC) son instrumentos que sirven para realizar mediciones dimensionales y de desviaciones de la regularidad geométrica de objetos con forma simple o compleja. Las hay de distintas dimensiones, tipos, materiales y exactitudes de medición y para aplicación en laboratorios de metrología, laboratorios industriales y en las líneas de producción.

Aunque las Máquinas de Medición por Coordenadas son diferentes entre sí, dependiendo del volumen de medición y la aplicación para las que son fabricadas, todas operan bajo el mismo principio: el registro de una pieza con una técnica de medición punto a punto, asignando a cada uno de éstos una terna de coordenadas referido a un sistema coordenado en 3D; y la vinculación numérica de las coordenadas asignadas a los puntos, con una geometría espacial completa de la pieza a través de un software de medición en un equipo de procesamiento de datos. Sin embargo, el modo en que el software es concebido es propio para cada máquina y dependiendo del diseñador y programador éste será capaz de manejar y parametrizar apropiadamente los elementos geométricos regulares que normalmente son manejados en una MMC, lo cual define prácticamente lo que la MMC puede medir.

PARAMETRIZACIÓN DE ELEMENTOS GEOMETRICOS EN UNA MMC.

Los softwares comerciales básicos de MMC cuando menos, manejan los elementos geométricos regulares como son el punto, la línea, el plano, el círculo, la esfera, el cilindro, el cono y normalmente los representan de la siguiente manera:

- El **punto** que es el elemento más simple es adecuadamente parametrizado en una MMC por una terna de coordenadas. Por ejemplo (x, y, z)

- La **línea** es manejada y parametrizada adecuadamente a través de cualquiera de las siguientes expresiones:

  - Un punto sobre la línea (x_0, y_0, z_0) y los cosenos directores que gobiernan la dirección de la línea (a, b, c), tal que cualquier punto sobre la línea (x, y, z) satisfaga la ecuación 1 para algún valor del parámetro *t*.

    $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \qquad (1)$$

  - Dos puntos sobre la línea (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), tal que cualquier punto sobre la línea (x, y, z) satisfaga la ecuación 2 para algún valor del parámetro *t*.

    $$(x, y, z) = (1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) \qquad (2)$$

- El **plano** es manejado y parametrizado adecuadamente a través de cualquiera de las siguientes expresiones:

  - Un punto sobre el plano (x_0, y_0, z_0) y los cosenos directores (a, b, c) de la normal al plano tal que cualquier punto en el plano (x, y, z) satisfaga la ecuación 3.

    $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

- Un punto sobre el plano (x_0, y_0, z_0) y un punto sobre la normal al plano (x_1, y_1, z_1) tal que cualquier punto en el plano (x, y, z) satisfaga la ecuación 4.
  $(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)+(z_1-z_0)(z-z_0)= 0$ (4)

- El **círculo** es representado mediante las coordenadas del centro, el diámetro o radio y con las características del plano sobre el cual recae, sin embargo, en algunos softwares solo es manejado a través del centro y el radio y no da información acerca del plano sobre el cual está contenido, pero es posible conocer éste a través de algunos alineamientos básicos.

- La **esfera** es uno de los elementos que para la mayoría de softwares de medición de MMC es parametrizada correctamente pero manejada incorrectamente como un punto que corresponde al centro de la esfera; y el diámetro o radio de la misma y no como una superficie.

- El **cilindro** al igual que la esfera no es manejado correctamente puesto que para la mayoría de los softwares de MMC es representado con las características de una línea que es el eje y su radio o diámetro y no como una superficie.

- El **cono** del mismo modo que el cilindro, es manejado con las características de dirección de una línea, el ángulo del cono y las coordenadas del ápice o bien la distancia de la superficie del cono a un punto sobre el eje del cono

El software también debe ser capaz de realizar cálculos y aplicaciones geométricamente válidas como: la obtención de distancias, intersecciones, ángulos y creación de líneas y superficies auxiliares entre elementos geométricos, siempre de acuerdo a la manera en que son representados los elementos geométricos de medición para la MMC y es ahí donde empiezan las limitaciones de éstos.

EJEMPLO PARA MEDICIÓN EN MMC

Un ejemplo de un problema de medición es el siguiente: suponga que se desea fabricar un lote de piezas como el de la figura 1, la cual es un sólido de revolución compuesta por dos cilindros, un cono y *n* barrenos radiales alrededor del cono formando un ángulo entre sí. Para la puesta a punto de los centros de maquinado se requiere conocer las coordenadas de todos los puntos C referidos a un sistema de coordenadas pieza.

Parece algo simple de medir en una MMC, sin embargo, de acuerdo con lo visto anteriormente no es tan fácil, puesto que si hacemos intersecar el cono y el cilindro correspondiente a cualquiera de los barrenos, se obtendrá el punto de intersección entre los ejes del cono y barreno en cuestión, si es que éstos se intersecan y no así el punto C buscado.

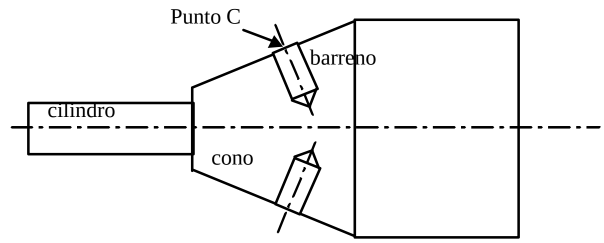

Figura 1.

Solución en el plano.

Una herramienta interesante para resolver muchos de éstos problemas es llevar las mediciones al plano, a través de rototraslaciones del sistema de coordenadas cuando esto sea posible, por ejemplo para el caso mostrado: suponga que los maquinados de la pieza son de buena exactitud y por lo tanto el eje de medición del barreno y el eje de medición del cono son coplanares y por ende éstos se intersecan, lo cual es una suposición válida puesto que los barrenos en el plano de diseño son radiales con respecto al eje del cono.

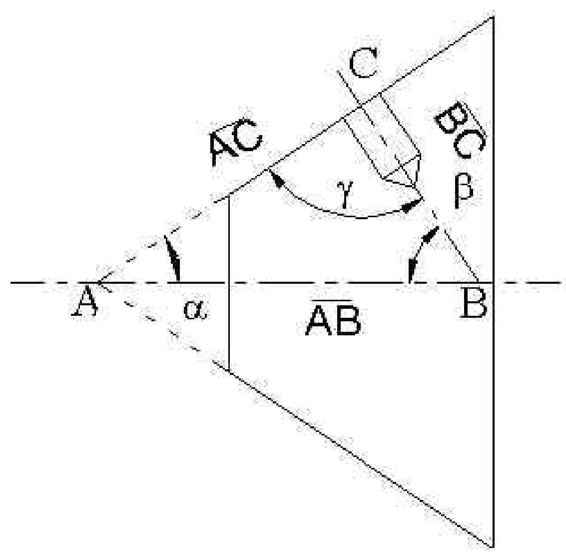

Figura 2.

Así pues, podemos construir una solución aproximada si se analiza el problema en el plano de la siguiente manera:

- Medir el cono con la MMC obteniendo:
  - Las coordenadas del ápice del cono (punto A de la figura 2)
  - ½ del ángulo de la generatriz del cono (ángulo α de la figura 2)

- Los cosenos directores que gobiernan la dirección del eje del cono.

- Alinear el eje del cono a través de una rotación espacial de modo que su dirección represente la línea AB de la figura 2.
- A través de una traslación hacer el origen del sistema de coordenadas en el ápice del cono A.
- Medir el barreno en cuestión como un cilindro, obteniendo:
  - El diámetro del cilindro.
  - Las coordenadas (x, y, z) de un punto sobre el eje del barreno.
  - Los cosenos directores que gobiernan la dirección del eje del barreno.
- Calcular la intersección del eje del cono y del eje del barreno para conocer el punto B de la figura 2 y por lo tanto se puede conocer la distancia AB.
- Calcular el ángulo espacial entre el eje del cono y el eje del barreno para conocer el ángulo β y formar el plano de trabajo por el que pasan los ejes mencionados.
- Puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º,

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta \qquad (5)$$

y aplicando el teorema de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} a}{BC} = \frac{\operatorname{sen} b}{AC} = \frac{\operatorname{sen} g}{AB} \qquad (6)$$

encontramos la solución al problema planteado,

$$AC = AB\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} g} \ \text{ y } \ BC = AB\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} g} \qquad (7)$$

puesto que las coordenadas del ápice A son conocidas.

El desarrollo anterior muestra una solución aproximada porque se ha supuesto que el eje del cono y del barreno en cuestión sean coplanares, si esto no sucediese, es posible también formular una solución real en tres dimensiones (3-D).

Solución en 3D.

Primeramente expresar la línea que corresponde al eje del barreno en función del parámetro *t* empleando la ecuación (1).

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t\cos a \\ y &= y_1 + t\cos b \\ z &= z_1 + t\cos g \end{aligned} \qquad (8)$$

donde: cosα = a; cosβ = b; cosγ = c son los cosenos directores que gobiernan la directriz de la línea y (x_1, y_1 y z_1) las coordenadas de un punto cualesquiera sobre ésta.

La ecuación para un cono circular cuyo eje coincide con el eje “x” esta dada por

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{x^2}{d^2} = 0 \qquad (9)$$

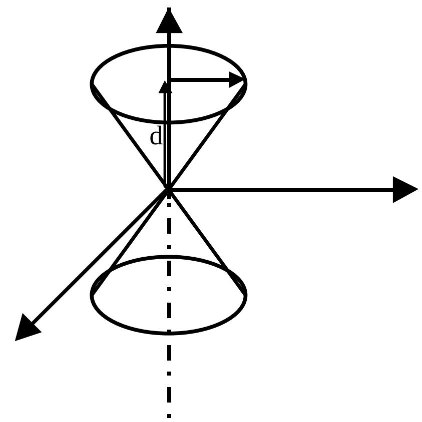

Figura 3

Para poder aplicar la ecuación (9), es necesario medir el cono y con los datos obtenidos de la dirección del eje, proceder a realizar una alineación espacial tal que el eje del cono coincida con el eje “x” y hacer el origen del nuevo sistema de coordenadas en el ápice del cono medido. Los parámetros *r* y *d* pueden ser obtenidos también de los datos de la medición del cono.

Ahora bien, el punto C buscado será aquel que tenga coordenadas (x, y, z) que satisfaga ambas ecuaciones (8) y (9), entonces para encontrar dicho punto se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la línea del eje del barreno (8) en la ecuación del cono circular (9)

$$\frac{(y_1 + tb)^2}{r^2} + \frac{(z_1 + tc)^2}{r^2} - \frac{(x_1 + ta)^2}{d^2} = 0 \qquad (10)$$

Desarrollando y reagrupando términos de la ecuación (10) se tiene

$$t^2\left[\frac{b^2 + c^2}{r^2} - \frac{a^2}{d^2}\right] + 2t\left[\frac{y_1 b + z_1 c}{r^2} - \frac{x_1 a}{d^2}\right] + \left[\frac{y_1^2 + z_1^2}{r^2} - \frac{x_1^2}{d^2}\right] = 0 \qquad (11)$$

La cual es una ecuación cuadrática que debe resolverse para *t* y tendrá dos soluciones de acuerdo con la solución general de la ecuación cuadrática:

$$pt^2 + qt + s = 0 \tag{12}$$

$$t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4ps}}{2p} \tag{13}$$

donde:

$$\begin{aligned} p &= \left[\frac{b^2 + c^2}{r^2} - \frac{a^2}{d^2}\right] \\ q &= 2\left[\frac{y_1 b + z_1 c}{r^2} - \frac{x_1 a}{d^2}\right] \\ s &= \left[\frac{y_1^2 + z_1^2}{r^2} - \frac{x_1^2}{d^2}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Ahora bien, es lógico que se tengan dos soluciones debido a que el eje del barreno cruza teóricamente en dos ocasiones la superficie del cono, así que deberá seleccionarse el parámetro *t* apropiado, evaluando la expresión (8) para encontrar los dos grupos de coordenadas (x, y, z) para cada valor de t_1 y t_2, tomar entonces las coordenadas apropiadas según las dimensiones de la pieza a medir y el origen del sistema de coordenadas al cual están referidas las mediciones.

Las diferencias encontradas entre los resultados del análisis aproximado en el plano y la solución real en 3D, con datos del mismo mesurando fueron en promedio 9 µm, para una pieza que constaba de 5 barrenos, sin embargo, como se mencionó anteriormente la exactitud de la solución en el plano depende de que tanto forman un plano el eje del cono y el eje de barreno, pues hubo resultados que concordaron del orden de 1 µm y otros cuya variación fue mayor y contribuyeron a aumentar la diferencia promedio.

DISCUSIÓN

Es muy importante antes de realizar la medición de un objeto con geometría compleja, que éste pueda ser descompuesto en elementos geométricos regulares, de no ser así, podrá emplearse cualquiera de las dos recomendaciones siguientes:

- Descomponer el objeto o parte de él, en elementos geométricos no regulares, pero parametrizables a través de alguna función matemática conocida a partir de un conjunto de puntos que pertenezcan al elemento. En este punto se debe considerar cuales son los puntos mínimos necesarios para la parametrización del elemento, y el usuario debe tomar mas puntos para lograr una parametrización por el criterio de mínimos cuadrados (puede ser algún otro criterio de distancia) para lograr una buena parametrización del elemento, dado que de esta forma se pueden minimizar los errores de la pieza o de las MMC.

- Medir el objeto o parte de él empleando la MMC en modo digitalización de contornos o superficies, lo cual permite la obtención de una malla de puntos que se puede emplear para la determinación de una forma irregular (se puede hacer uso de algún software de CAD-CAM, considerando siempre que esto puede traer consigo pérdida de exactitud) y con los parámetros arrojados por el modelo obtenido encontrar las cotas especificadas o útiles con transformaciones empleando geometría analítica.

CONCLUSIONES

Evidentemente para cada tipo de problema de medición en MMC podrán existir diferentes maneras de resolverlos, muchas de ellas implican alineamientos manuales y el uso de mesas inclinables, esferas y cilindros de referencia sobre la pieza ya maquinada, lo cual aumenta la incertidumbre de medición y el tiempo invertido, de tal modo que siempre deberá emplearse el método que satisfaga el problema en el menor tiempo posible y empleando la menor cantidad de accesorios y patrones adicionales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Murray R. Spiegel, Manual de fórmulas y tablas matemáticas, Serie Schaum, McGRAW-HILL, 1990.

[2] E. Arizmendi, G. Navarrete, C. Galván, Notas del curso Aseguramiento metrológico en máquinas de medición por coordenadas, Centro Nacional de Metrología, Noviembre del 2000.

[3] Charles H. Lehmann, Geometría analítica, LIMUSA, 1984.

[4] Earl W. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Wadswort Internacional Iberoamérica, 1982.