

CÁLCULO NUMÉRICO DE LA INTEGRAL DE RAYLEIGH Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS MEDIANTE DATOS EXPERIMENTALES

N. Muñoz
 Centro Nacional de Metrología
 km 4,5 carretera a los Cués, el Marqués, Qro.
 Tel. (4) 2 11 05 00. FAX: (4) 2 11 05 53

Resumen: Se presenta el cálculo numérico de la integral de Rayleigh empleando la Transformada Rápida de Fourier y las Funciones de Green. El resultado de estos cálculos es la distribución de presión acústica a través del campo ultrasónico, con lo que es posible calcular el valor de la presión fuera del eje axial. Los datos teóricos son comparados con datos obtenidos experimentalmente, donde se mide la presión acústica en dos ejes transversales que genera un transductor circular plano no enfocado de 6.35 mm de diámetro, excitado con tonos ráfaga. El modelo matemático empleado está basado en la teoría de la fuente de pistón plano, que es un disco que se mueve hacia atrás y hacia delante como un pistón, a lo largo de su eje mayor, generando una onda sonora. Aunque actualmente algunos transductores tienen diferentes geometrías y están incluso formados por arreglos de transductores, el análisis de una fuente de pistón plano, sirve como base para modelar cualquier tipo de transductor.

INTRODUCCIÓN

En esta sección se presenta la evaluación numérica de la integral de Rayleigh empleando el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (*FFT, Fast Fourier Transform*), para un radiador plano, con una velocidad en la superficie del transductor conocida. Con esta técnica se calcula la presión acústica radiada en el campo cercano y en el campo lejano de la fuente. Existe un error de sesgo introducido por la FFT, el cual es reducido significativamente mediante el promedio de la función de Green empleada.

I.- TÉCNICA PARA CALCULAR LA PRESIÓN ACÚSTICA USANDO LA FFT

La integral de difracción de Rayleigh que representa la radiación del campo asociado con una fuente puntual en una superficie está representada por la siguiente ecuación [10],

$$p(x, y, d) = -i\omega r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y') \frac{\exp(ikR)}{R} dx' dy' \quad (1)$$

donde $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ y $v(x', y')$ es la velocidad de la partícula. La integral se realiza sobre un plano infinito en $z=0$.

Se define la función $h(x, y, d)$

$$h(x, y, d) = -i\omega r g(x, y, d) \quad (2)$$

$$g(x, y, d) = \frac{\exp(ik\sqrt{x^2 + y^2 + d^2})}{2p(x^2 + y^2 + d^2)^{1/2}}$$

Donde la función $g(x, y, d)$ es la función de Green [1].

La ecuación (1) puede ser escrita en la forma de la convolución para $z=d$, en dos dimensiones [4].

$$p(x, y, d) = -i\omega p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(x', y') h(x-x', y-y', d) dx' dy' \quad (3)$$

Aplicando el teorema de convolución se tiene que,

$$p(x, y, d) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{V}(k_x, k_y) \hat{H}(k_x, k_y, d)] \quad (4)$$

II.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN $v(x, y)$

La función $v(x, y)$ denominada velocidad de partícula, describe la distribución de excitación a través de la cara del transductor, la cual es considerada constante (v_0) en toda la cara del transductor y 0 fuera de ésta, es decir,

La velocidad de partícula está definida como

$$v(x, y) = \begin{cases} v_0, & \dots, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \\ 0, & \dots, \sqrt{x^2 + y^2} > r \end{cases} \quad (5)$$

La formulación de la integral de Rayleigh[1], permite emplear para la fuente cualquier forma geométrica. En este caso, se empleó una fuente circular que simula el comportamiento de un pistón plano definida por la función (5) y mostrada en la figura 1.

Los efectos debido a la irregularidad del borde de la fuente causado por emplear una matriz cuadrada en los cálculos de $v(x,y)$, se reduce considerablemente al seleccionar un muestreo de (x,y) mayor a 64. Además, la discontinuidad la cual es brusca en el borde del radiador, puede producir efectos no deseados al calcular la Transformada Rápida de Fourier. Estos efectos son mínimos cuando se suaviza la "caída" de la función entre v_0 y 0, interpolando con "splines cúbicos" de revolución[2].

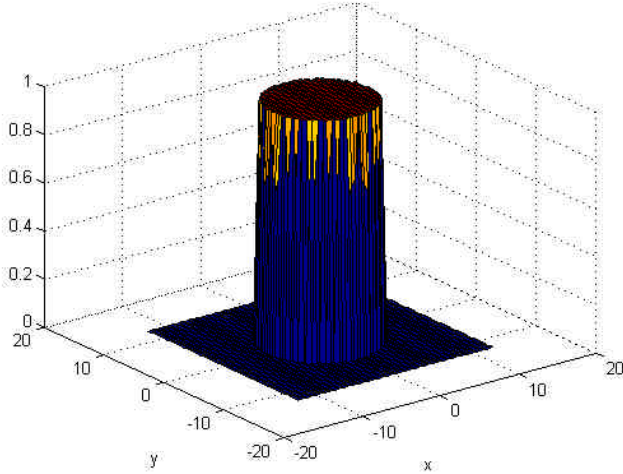


Figura 1.- Distribución de excitación a través de la cara del transductor $v(x,y)$.

Otro punto importante a considerar es como seleccionar el intervalo de muestreo en el dominio (k_x, k_y) y el ancho de la ventana en este plano. Además saber cuales serán los valores de k_x y k_y [3].

En el dominio de (x,y) , el ancho de la ventana toma valores desde $[-L/2$ a $L/2]$ con intervalos de muestreo $a = Dx = Dy = L/N$, entonces los puntos $x_m = mDx$ y $y_n = nDy$.

Estrechamente asociado con el dominio de (x,y) , está el dominio de (k_x, k_y) , cuya ventana se denota como $[-\Omega/2, \Omega/2]$. En este dominio se requiere una malla consistente con la malla en el dominio de (x,y) , con puntos igualmente espaciados, separados por una distancias Δk .

Entonces $k_{x_p} = p\Delta k$ y $k_{y_q} = q\Delta k$. Donde p y q van desde $-N/2+1$ hasta $N/2$.

por lo tanto

$$\Delta k = \frac{2p}{L} \quad y \quad \Omega = N\Delta k \quad (6)$$

Ahora, la FFT de la función $v(x,y)$ se define como [4],

$$\hat{V}(k_x, k_y) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} v(x,y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (7)$$

Donde L es el ancho de la ventana. Entonces la DFT de $v(x,y)$ es

$$\hat{V}_D(\tilde{p}\Delta k, \tilde{q}\Delta k) = a^2 \sum_{\tilde{m}=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{\tilde{n}=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} v(\tilde{m}a, \tilde{n}a) e^{-i\frac{2p}{N}(\tilde{p}\tilde{m} - \tilde{q}\tilde{n})} \quad (8)$$

Donde

- a es el intervalo de muestreo en el dominio x,y .
- N es el número de muestras tanto del dominio de x,y como en el de k_x, k_y . Debe ser un número potencia de 2.
- Δk es el intervalo de muestreo en el dominio de k .

III LA FUNCIÓN DE GREEN MODIFICADA

Se ha encontrado que

$$\hat{H}(k_x, k_y, d) = -iwr\hat{G}(k_x, k_y, d) = wr \frac{e^{ik_z d}}{k_z} \quad (9),$$

donde $\hat{G}(k_x, k_y, d)$ es la transformada de la función de Green para este problema [5], entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} \rho(x,y,d) &= -iwr\mathfrak{S}^{-1}[\hat{V}(k_x, k_y, d)\hat{G}(k_x, k_y, d)] \quad (10) \\ &= wr\mathfrak{S}^{-1}\left[\hat{V}(k_x, k_y, d)\left(\frac{e^{ik_z d}}{k_z}\right)\right] \end{aligned}$$

Donde

$$k_z = \begin{cases} (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}, & k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ i(k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2}, & k^2 \leq k_x^2 + k_y^2 \end{cases}$$

La ecuación (10) representa una integral impropia, ya que el integrando contiene un polo en $k_z=0$, y aún así, el valor de la integral es finita. Sin embargo cuando el integrando es muestreado por la FFT, el resultado de la suma se vuelve numéricamente inestable, para cualquier valor de las coordenadas

(x,y) en algún punto de muestreo (mDk, nDk) cerca de $k_z=0$.

Se ha definido un círculo de radiación dado por la ecuación $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, donde sea que el círculo de radiación coincida con los puntos de la malla, la DFT fallará. Para las frecuencias más bajas donde la DFT fallará es cuando $k=Dk=2p/L$, que es cuando $\lambda=L$ (una longitud de onda a través de la apertura).

Por lo anterior es necesario modificar \hat{G} para reducir el error de sesgo producido por el "aliasing" en el espacio de (k_x, k_y) [4].

La DFT puede ser vista como una aproximación de la transformada continua de Fourier (se ilustra sólo en una dimensión).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(k_x) \hat{G}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \approx \Delta k \sum_{m=-N/2}^{m=N/2} \hat{V}(m\Delta k) \hat{G}(m\Delta k) e^{im\Delta k x} \quad (11)$$

Para hacer una aproximación adecuada, el área bajo cada rectángulo debe ser igual al área bajo la curva correspondiente a éste. Es claro que esto no ocurrirá cerca de las singularidades $k_x = k$. El área bajo la curva de este segmento es,

$$\int_{m\Delta k - \Delta k/2}^{m\Delta k + \Delta k/2} \hat{V}(k_x) e^{ik_x x} \hat{G}(k_x) dk_x \quad (12)$$

Es posible tomar estos dos términos fuera de la integral sin causar un gran error y pasar al caso en dos dimensiones y considerando sólo la función de Green, tal que

$$\int_{(\Delta k)^2} dk_x dk_y \hat{G}(k_x, k_y, d) = (\Delta k)^2 \overline{\hat{G}} \quad (13)$$

Donde la integración es realizada sobre una caja cuadrada de longitud Δk centrada en un punto de la malla y $\overline{\hat{G}}$ es el valor promedio de \hat{G} en la caja. Esta integral se puede resolver fácilmente en coordenadas polares, si se reemplaza la caja cuadrada por un sector truncado longitud Δk , se obtiene que para los puntos de la red en (k_x, k_y) = (pDk, qDk).

$$\overline{\hat{G}} = \frac{1}{A} \int_{q_1}^{q_1 + \Delta q} dq \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} k_r \frac{ie^{ik_x d}}{k_z} dk_r \quad (14)$$

Donde

$$k_r^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k_0^2 = (p^2 + q^2)\Delta k^2, \quad y$$

$$k_z = \begin{cases} (k^2 - k_r^2)^{1/2}, & k^2 \geq k_r^2 \\ i(k_r^2 - k^2)^{1/2}, & k^2 \leq k_r^2 \end{cases}$$

el área del sector truncado es $A=Dq k_0 Dk$.

Sustituyendo A en la integral (14) y simplificando se obtiene,

$$\overline{\hat{G}} = \frac{2}{(k_2^2 - k_1^2)} \int_{k_1}^{k_2} k_r \frac{ie^{ik_x d}}{k_z} dk_r \quad (15)$$

Donde $k_1=k_0-Dk/2$ y $k_2=k_0+Dk/2$

Se reemplaza \hat{G} en la ecuación (10) por la función de Green promediada. La singularidad en $k_z = 0$ ha sido eliminada. Debido al proceso de promediación, las altas frecuencias, así como el polo han sido eliminados; ahora la nueva función de Green es más suave, por lo que resulta un "aliasing" mucho menor.

IV RESULTADOS

Con la base teórica de las secciones anteriores, se escribió un programa en Matlab™ versión 5.3, con el cual es posible obtener la distribución de presiones en el campo acústico. Los resultados son mostrados en gráficas de la presión acústica absoluta en los planos transversales (X-Y) para un valor fijo de $z = z_i$. Para cada plano transversal se muestra el perfil de cada uno de éstos en el centro del plano. Ver figura 3.

Los resultados que se muestran a continuación fueron calculados con los siguientes datos:

Símbolo	Parámetro	Valor
r	Radio del transductor	6.35 mm
f	Frecuencia del transductor	3.5 MHz
c	Velocidad de propagación del sonido en agua a 22°C	1488.33 m/s
z	Valores de z (eje axial) de 0 a 400 mm	en pasos variables
n	Resolución del eje X y Y	n=128

Tabla 1.- Datos alimentados al programa de cómputo

La figura 2a) muestra la curva de presiones relativas al valor máximo con respecto al eje z, donde se observa claramente el comportamiento del campo cercano y el campo lejano.

En la figura 2b) se muestra la misma curva, pero en este caso, se calculó la presión acústica, sin eliminar las singularidades de \hat{G} , es decir que en los cálculos no se empleó la función de Green modificada $\overline{\hat{G}}$.

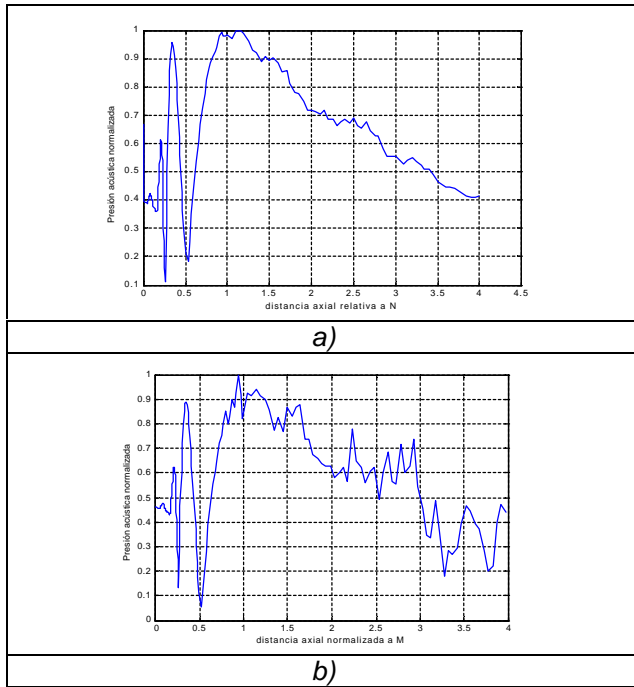


Figura 2.- Presiones relativas en el eje axial.

Se muestran los planos transversales y su perfil para diferentes valores de z.

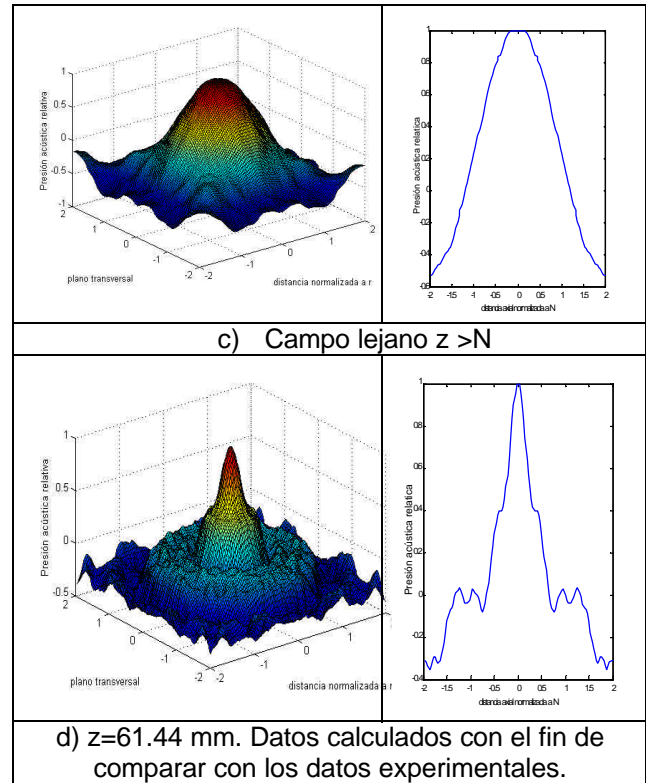
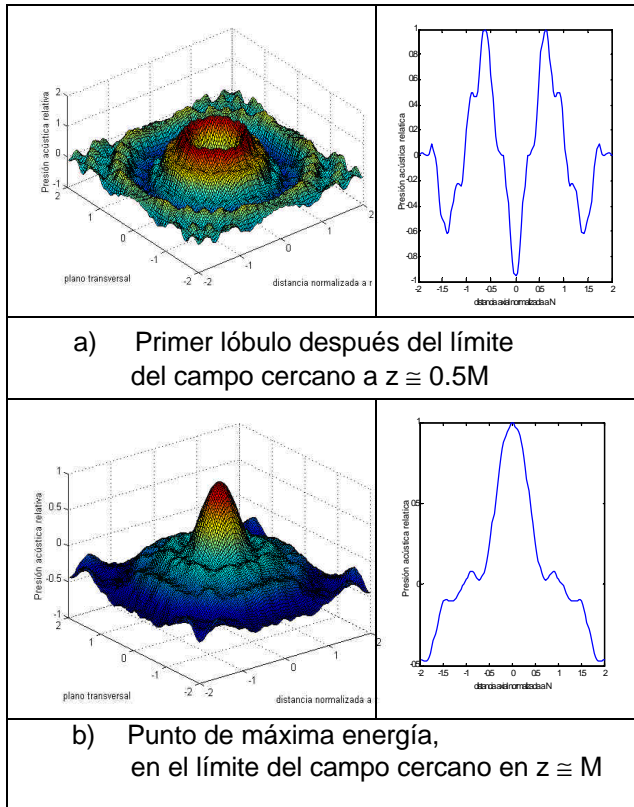


Figura 3.- Planos transversales y su respectivo perfil, para diferentes valores de z



Comparación entre los valores de presión acústica obtenidos en forma teórica y los valores medidos

En la figura 4 se muestran dos perfiles uno de datos medidos (experimentalmente) y otro de datos calculados (teóricamente).

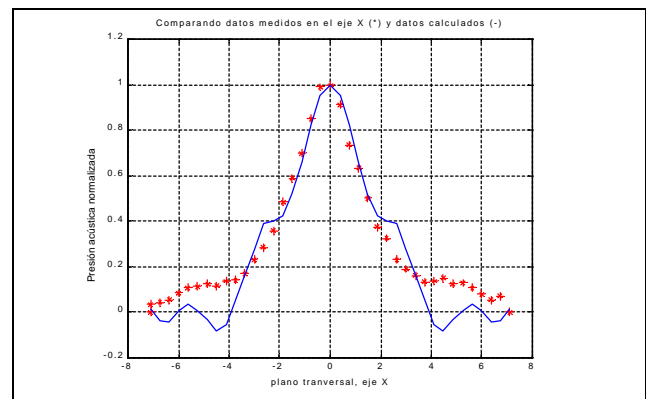


Figura 4.- Comparación entre los perfiles obtenidos de datos calculados (línea continua) y datos medidos (línea punteada).

Para obtener el perfil medido se realizó un experimento empleando una fuente de prueba pulsada modelo CS0006B, seleccionando la señal de salida máxima (*High*) cuyo transductor tiene un diámetro de 6.35 mm y frecuencia de 3.5 MHz. El sensor de medición fue un hidrófono coplanar de 0.5 mm de radio nominal de elemento activo modelo B014. La sensibilidad del hidrófono /amplificador de 14.3 nV/Pa a 3.5 MHz

DISCUSIÓN

Se eligió como parámetro de comparación el ancho del haz a -6 dB (*-6 dB beam width*) que se muestra en la tabla 3.2 tanto para los perfiles calculado como los medidos,

Perfiles	Ancho del haz a -6 dB (mm)
datos medidos en eje X	3.145
datos medidos en eje Y	3.128
datos calculados	3.175

Tabla 2.- Comparación del ancho de haz a –6dB

Se observa una desviación de aproximadamente 1% entre los anchos del haz de los perfiles medidos y calculados.

CONCLUSIONES

Aún cuando se supone un modelo matemático donde el transductor es ideal y el medio homogéneo y además existe una incertidumbre asociada a los datos medidos, no se obtiene una desviación alta en la comparación de la tabla 2. Será necesario realizar más mediciones para comparar y mejorar el modelo considerando la propagación no lineal del ultrasonido.

REFERENCIAS

- [1]. Cho, Jones, Singh, “*Medical Images in Ultrasound*”, Editorial Willey Interscience
- [2]. MATLAB User’s Guide Manual. Versión 5.
- [3]. W. L. Briggs, V. E. Henson. “The DFT”, an owner’s manual for the Discrete Fourier Transform. Editorial Siam.
- [4]. E. G. Williams, “ Numerical evaluation of the radiation from un baffled, finite plates using the FFT”. J. Acoust. Soc. Am. **74**(1). July 1983.
- [5]. J.D. Aindow, A. Markiewicz, R.C.Chivers, “*Quantitative investigation of disk ultrasonic sources*”. J. Acoust. Soc. Am. **78**(5). November 1985.
- [6]. G.C. Sherman, “*Integral transform formulation of diffraction theory*”, J. Optic. Soc. Am. **57**(1490)1967; Phys. Rev. Lrtt. **21**, 761(1968); “*Diffraction wavefields expressible by plane-wave expansions containing only homogeneos wave*,” J. Opt.. Soc. Am. **59**, 697 (1969).
- [7]. G.R. Baldock, T. Bridgeman. “*The Mathematical Theory of Wave Motion*”. Ellis Horwood Series. Chelsea College, University of London.
- [8]. W. H. Press, S. A. Teukoisky, W. T. Vettering, B. P. Flannery. “*Numerical Recipies in C*” Editorial Cambridge.
- [9]. R.C. Preston, “*Output Measurements for Medical Ultrasound*”, Editorial Springer-Verlag.
- [10]. E. G. Williams and J.D. Maynard. “*Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT*”, J. Acoust. Soc. Am. **72**(6). December 1982.
- [11]. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Salery. “*Numerical Mathematics*”. Editorial Springer
- [12]. L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V. Sanders, “Fundamentos de Acustica”.Editorial Limusa, 1990.
- [13]. G, Chen & J. Zhou. “*Boundary Element Methods*”, Mathematics and Applications.
- [14]. 3Y-34-6543 PCDF Membrane Hydrophone Information Sheet,GEC-Marconi Researchb Centre.
- [15]. N. Muñoz, “*Caracterización del haz acústico generado por transductores ultrasónicos*”, Simposio 1999, Concyteq. Qro. México.