

LA SIMULACIÓN NUMÉRICA COMO UNA HERRAMIENTA EN LA ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN

Wolfgang A. Schmid
Centro Nacional de Metrología, División de Óptica y Radiometría
km 4,5 Carretera a los Cués, El Marqués, Qro., México
Tel.: (442) 211 0554, Fax: 211 0553, e-mail: wschmid@cenam.mx

Resumen: Se presenta la aplicación de simulaciones numéricas con datos aleatorios para resolver problemas y/o demostrar y entender conceptos de incertidumbre. Como ejemplo particular se analiza el problema de fuentes de incertidumbre que aparecen repetidas veces en la calibración de un instrumento y en las mediciones posteriores realizadas con este instrumento, como es, por ejemplo, la resolución.

INTRODUCCIÓN

La metodología más difundida para la estimación de la incertidumbre de medición y reconocida a nivel mundial está documentada en la "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" – GUM [1]. Sin embargo, aunque el esquema presentado en la GUM es aplicable en la mayor parte de los casos reales, tiene algunas limitaciones [2]. Es por esto que la GUM permite otros conceptos como métodos analíticos y métodos numéricos para resolver problemas de incertidumbre (ver [1] G.1.5.).

En el presente artículo se analiza con los tres enfoques

- método analítico,
- método estándar de la GUM,
- método numérico, simulando mediciones con datos aleatorios

un ejemplo de incertidumbre relativamente simple, que, a pesar de su sencillez, está causando controversia entre muchos metrólogos. En el ejemplo se analiza la situación de aquellas fuentes de incertidumbre que aparecen en la calibración de un instrumento de medición y se repiten en las mediciones realizadas con el instrumento [3].

El problema puede manifestarse, por ejemplo, en una opinión como la siguiente: "La temperatura (como magnitud de influencia) varía en el mismo intervalo cuando calibro mi patrón de trabajo y cuando lo utilizo después para calibrar instrumentos de medición. Por esto, debo considerar la incertidumbre por temperatura nada más una vez. Siempre la considero en la calibración del patrón – en las mediciones posteriores con el patrón ya no la considero de nuevo." Por supuesto, el mismo problema puede manifestarse, sustituyendo

"temperatura" por cualquier otra magnitud de influencia (presión atmosférica, humedad relativa, frecuencia, etc.).

De la misma manera, es posible encontrar la opinión de que la incertidumbre por resolución, una vez considerada en la calibración del instrumento, ya no debe ser considerada de nuevo para la incertidumbre de las mediciones con este instrumento. Es evidente que los dos ejemplos reflejan en realidad el mismo problema y tendrán por esto la misma respuesta.

DESCRIPCIÓN DEL EJEMPLO ANALIZADO

Como ejemplo, y simplificado por cuestiones didácticas, se analiza la medición de una fuente de tensión con un multímetro digital de una resolución de 1mV. El multímetro está calibrado, conociendo de esta manera su error de indicación E_{calibr} , el cual es aplicado para corregir las lecturas L con el multímetro y obtener como **mensurando** la tensión corregida V_{corr} :

$$V_{corr} = L - E_{calibr} \quad (1)$$

Analizando el problema teóricamente, lo que se busca es la tensión verdadera V_{vv} de la fuente, que se obtiene corrigiendo la tensión verdadera medida V_{med} con el error verdadero E_{vv} del multímetro. E_{vv} puede ser generado por FEMs, un corrimiento de su amplificador, etc. (ver Fig. 1):

$$V_{vv} = V_{med} - E_{vv} \quad (2)$$

Debido a que los valores verdaderos nunca pueden ser obtenidos, se utilizan L , E_{calibr} y V_{corr} como mejores estimados de V_{med} , E_{vv} y V_{vv} .

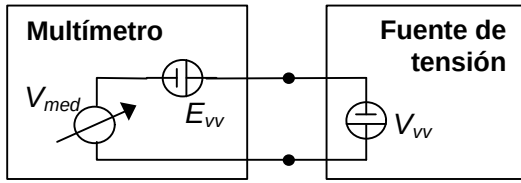


Fig. 1 Medición de una fuente de tensión con un multímetro (ver texto).

La contribución dominante a la incertidumbre, tanto en el proceso de la calibración del multímetro como en las mediciones realizadas con el multímetro, es su resolución. Para propósitos de este trabajo se desprecian las demás contribuciones, sin embargo esta consideración no está muy alejada de la realidad en procesos de medición de este tipo.

MÉTODO ANALÍTICO

Para la solución analítica se busca la distribución de probabilidad del mensurando V_{vv} a partir de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada V_{med} y E_{vv} . Considerando la resolución del multímetro como limitación para determinar V_{med} y E_{vv} se asigna a V_{med} y E_{vv} una distribución uniforme en un intervalo de $\pm 0,5$ mV alrededor de L y E_{calibr} , respectivamente (ver Fig. 2). La combinación de dos distribuciones uniformes en intervalos de $\pm 0,5$ mV da como resultado una distribución triangular en un intervalo de ± 1 mV (ver p. ej. [4]).

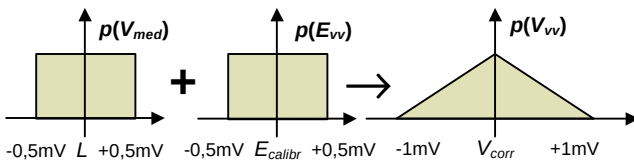


Fig. 2 La combinación de dos distribuciones rectangulares produce una distribución triangular.

Resumiendo, la estimación de V_{vv} por V_{corr} tiene una incertidumbre de ± 1 mV, que corresponde a una distribución de probabilidad de forma triangular. Para ser preciso, hay que sustituir el término “distribución de probabilidad” por “función de densidad de probabilidad”, tratándose de variables continuas (ver [1] C.2.5.).

La incertidumbre estándar u de la medición de V_{corr} se obtiene por (ver p. ej. [1, 5]):

$$u(V_{corr}) = \frac{2\text{mV}}{\sqrt{24}} = \frac{1\text{mV}}{\sqrt{6}} = 0,41\text{ mV} \quad (3)$$

El resultado de la estimación de la incertidumbre de una medición, generalmente se presenta en términos de una incertidumbre expandida U , que corresponde a un cierto nivel de confianza $P(\pm U)$. El nivel de confianza representa la probabilidad de que el intervalo definido por $\pm U$ alrededor del mejor estimado para el mensurando contiene el valor verdadero del mensurando.

Teóricamente el nivel de confianza $P(\pm U)$ se estima integrando la función de densidad de probabilidad $p(V_{vv})$ de la distribución asignada a V_{vv} dentro de los límites de $\pm U$:

$$P(\pm U) = \int_{V_{corr}-U}^{V_{corr}+U} p(V_{vv}) dV_{vv} = \int_{-U}^{U} p(V) dV \quad (4)$$

donde $V = V_{vv} - V_{corr}$. Considerando una distribución triangular V :

$$p(V) = \frac{1}{\text{mV}} \cdot \left(1 - \frac{|V|}{\text{mV}}\right) \quad \text{para } |V| < 1 \text{ mV}$$

$$p(V) = 0 \quad \text{para } |V| > 1 \text{ mV} \quad (5)$$

resulta para el nivel de confianza:

$$P(\pm U) = 2 \cdot U - U^2 \quad \text{para } |U| < 1 \text{ mV}$$

$$P(\pm U) = 1 \quad \text{para } |U| > 1 \text{ mV} \quad (6)$$

tomando los valores de U en unidades de mV.

Despejando (6) se obtiene la incertidumbre expandida $U(P)$ que corresponde al nivel de confianza P :

$$U(P) = \left(1 - \sqrt{1 - P}\right) \text{ mV} \quad (7)$$

Comúnmente se expresa U para un nivel de confianza de 95,45%, lo que resulta en:

$$U(95,45\%) = 0,787 \text{ mV} \quad (8)$$

MÉTODO DE LA GUM

De acuerdo al método de la GUM, se calcula la incertidumbre estándar combinada del mensurando $u_c(V_{corr})$ a partir de las incertidumbres estándar de las magnitudes de entrada $u(L)$ y $u(V_{calibr})$, aplicando la ley de propagación de incertidumbre.

Considerando para L y E_{calibr} la resolución como única fuente de incertidumbre, resulta (ver p. ej. [1]):

$$u(L) = u(E_{calibr}) = \frac{1 \text{ mV}}{\sqrt{12}} = 0,29 \text{ mV} \quad (9)$$

y con la ley de propagación de incertidumbres:

$$u_c(V_{corr}) = \sqrt{u^2(L) + u^2(E_{calibr})} = \frac{1 \text{ mV}}{\sqrt{6}} = 0,41 \text{ mV} \quad (10)$$

$u_c(V_{corr})$ coincide con el valor obtenido por el método analítico en (3), lo que muestra que es preciso considerar la incertidumbre por resolución nuevamente en el proceso de medición. Siguiendo la opinión mencionada en la "Introducción", el no considerar esta contribución en la medición, basado en el argumento que ya fue considerada durante la calibración, resultaría en un valor erróneo y demasiado pequeño de:

$$u^*(V_{corr}) = u(E_{calibr}) = \frac{u_c(V_{corr})}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

Estrictamente, el método de la GUM solamente es aplicable, cuando se cumplen las condiciones del Teorema del Límite Central [1, 2], resultando en una distribución normal o t de Student para el mensurando. Evidentemente este no es el caso para el ejemplo analizado, debido a que la distribución del mensurado es triangular. Como consecuencia, calculando la incertidumbre expandida para un nivel de confianza de 95,45% de acuerdo al método estándar de la GUM $U = 2 \cdot u_c$, resultaría en un valor erróneo de 0,816 mV, comparándolo con 0,787 mV resultando en (8).

MÉTODO NUMÉRICO

Análisis conceptual del ejemplo

Para resolver el problema numéricamente, se simula la medición de un gran número de fuentes de tensión. Sea p. ej. una compañía que tiene varios multímetros del mismo modelo con una resolución de 1 mV. Los multímetros se calibran con un calibrador de incertidumbre mucho menor de 1 mV, así que finalmente la incertidumbre de su calibración $u(E_{calibr})$ estará dominada por la resolución.

La compañía fabrica fuentes de tensión eléctrica y utiliza los multímetros para medir la tensión generada de cada fuente en una verificación final. De manera razonable, se supone la contribución dominante a la incertidumbre es nuevamente la resolución del multímetro, despreciándose las otras contribuciones.

La pregunta que se presenta para la compañía es ¿qué valor de incertidumbre se obtiene en estas mediciones?

Debido al carácter estadístico de la incertidumbre y aplicando el concepto del nivel de confianza, se espera que un cierto porcentaje (alto) de las mediciones resulte en un valor V_{corr} cercano al valor verdadero V_{vv} , o sea, V_{vv} se encuentra dentro del intervalo de incertidumbre $\pm U$ alrededor de V_{corr} :

$$V_{corr} - U < V_{vv} < V_{corr} + U \quad (12)$$

La simulación

Con la simulación ("mediciones virtuales") se estima el nivel de confianza mediante el porcentaje de mediciones "correctas" de acuerdo a (12) en función de U y se lo compara con el resultado teórico obtenido en (6). U se presenta como incertidumbre "expandida", sin embargo se utiliza este término en un sentido más general y se permite para U también valores muy pequeños.

Para la simulación se generó una hoja de cálculo de Excel™ donde se asignan, mediante datos aleatorios, los "valores verdaderos" de la tensión generada a cada una de un conjunto de 1000 fuentes de tensión y del error de indicación a cada uno de 25 multímetros. Cada fuente se "mide" con uno de los multímetros, así que cada multímetro "mide" en total 40 fuentes. El esquema de las "mediciones", más bien comparaciones, está presentado con el siguiente caso:

Sea que el multímetro seleccionado tenga p. ej. el error verdadero:

$$E_{vv} = -2,41 \text{ mV} \quad (13a)$$

Debido a su resolución limitada de 1 mV, en la calibración de este multímetro no será posible obtener este valor como tal. Más bien resultaría como valor redondeado:

$$E_{calibr} = -2 \text{ mV} \quad (13b)$$

La fuente seleccionada tenga p. ej. una tensión verdadera:

$$V_{vv} = 1005,61 \text{ mV} \quad (13c)$$

Midiéndola se va a agregar a este valor el error verdadero del multímetro:

$$V_{med} = V_{vv} + E_{vv} = 1003,20 \text{ mV} \quad (13d)$$

por lo cual el multímetro, considerando su resolución, indicará el valor redondeado:

$$V_{ind} = 1003 \text{ mV} \quad (13e)$$

Este valor de indicación se debe corregir por el error del multímetro, que fue determinado en su calibración, para obtener finalmente el resultado corregido:

$$V_{corr} = V_{ind} - E_{calibr} = 1005 \text{ mV} \quad (13f)$$

Resumiendo, se observa que con los datos de este ejemplo, la medición de la fuente resultará en un valor de 1005 mV, mientras su valor verdadero es de 1005,61 mV, o sea el error de esta medición es de $-0,61 \text{ mV}$. Dependiendo del valor declarado para la incertidumbre U , se debe clasificar la medición de acuerdo a (12).

Este esquema está instalado en la hoja de cálculo para las 1000 “mediciones” con sus valores respectivos de E_{vv} y V_{vv} y se suman las mediciones “correctas”. Variando el valor de U entre 0 y más de 1 mV, se obtiene la relación del porcentaje de las mediciones correctas en función de U , lo cual se compara con el nivel de confianza estimado teóricamente en (6).

Para analizar la opinión mencionada en la “Introducción” de que se debe considerar la incertidumbre por resolución una sola vez, se realiza al mismo tiempo la comparación con el nivel de confianza obtenido para este caso. La estimación de V_{vv} por V_{corr} tendría la incertidumbre de $\pm 0,5 \text{ mV}$, con una distribución uniforme:

$$\begin{aligned} p(V) &= \frac{1}{\text{mV}} & \text{para } |V| < 0,5 \text{ mV} \\ p(V) &= 0 & \text{para } |V| > 0,5 \text{ mV} \end{aligned} \quad (14)$$

donde $V = V_{vv} - V_{corr}$. Aplicando (4), el nivel de confianza resultaría en:

$$\begin{aligned} P(\pm U) &= 2 \cdot U & \text{para } |U| < 0,5 \text{ mV} \\ P(\pm U) &= 1 & \text{para } |U| > 0,5 \text{ mV} \end{aligned} \quad (15)$$

tomando los valores de U en unidades de mV.

Resultados

En la Fig. 3. se presentan resultados típicos de la simulación, obtenidos con cinco repeticiones con datos aleatorios de la misma dispersión. Los valores aleatorios tanto para V_{vv} como para E_{vv} fueron obtenidos a partir de distribuciones normales. La desviación estándar de V_{vv} es de 20 mV, la de E_{vv} es de 3,2 mV. Sin embargo, los resultados no difieren notablemente utilizando distribuciones uniformes. Los datos se comparan con el nivel de confianza para una distribución triangular y rectangular de acuerdo a (6) y (15).

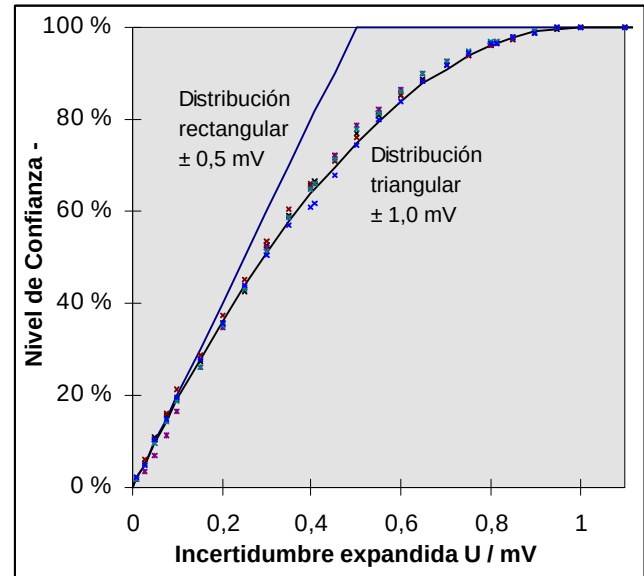


Fig. 3 Comparación de los valores del nivel de confianza teóricos (líneas) y obtenidos en 5 simulaciones, con datos aleatorios diferentes, pero de la misma dispersión (puntos).

Se observa una muy buena coincidencia de los resultados de la simulación con el nivel de confianza para una distribución triangular de un ancho de $\pm 1 \text{ mV}$, mientras difieren claramente del nivel de confianza para una distribución uniforme de un ancho de $\pm 0,5 \text{ mV}$. Este resultado subraya que es correcto considerar la resolución como fuente de incertidumbre dos veces.

Mientras un cambio de la desviación estándar de los E_{vv} (multímetros) no tiene una influencia en los resultados de la simulación, una reducción de la desviación estándar de las tensiones de las fuentes $\sigma(V_{vv})$ abajo de 1 mV resulta en que la simulación desvíe notablemente del nivel de confianza teórico de una distribución triangular. La Fig. 4 lo muestra para $\sigma(V_{vv}) = 0,3$ mV. Hay que notar que la variación de las fuentes está en el mismo orden o menor que la resolución del instrumento con el cual se mide y que las desviaciones se observan para valores de U menores a 0,5 mV – aunque el comportamiento observado permite una interpretación teórica, el caso es poco relevante para una medición real.

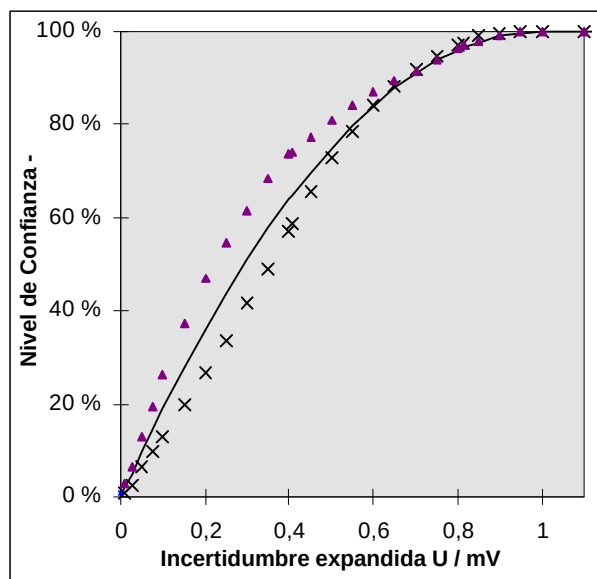


Fig. 4 Simulación considerando una dispersión pequeña de las fuentes $s(V_{vv}) = 0,3$ mV y los valores centrados (media de los V_{vv}) en un valor entero, p.ej. 1005 mV (triángulos) o intermedio entre dos enteros, p. ej 1005,5 mV (cruces).

CONCLUSIONES

En el presente artículo se da respaldo, mediante argumentos teóricos y numéricos, a la afirmación de que fuentes de incertidumbre que aparecen de la misma manera tanto en la calibración de como en las mediciones posteriores con un instrumento, como es p. ej. la resolución, deben ser consideradas dos veces para obtener correctamente la incertidumbre de las mediciones con este instrumento. La demostración se realizó bajo la simplificación de que la fuente analizada es la que domina y que las demás pueden ser despreciadas.

Sin embargo, el concepto sigue siendo válido también en presencia de más fuentes de incertidumbre, aunque la demostración, con los argumentos presentados aquí, se complicaría notablemente.

Además se muestra la utilidad de las simulaciones con datos aleatorios para resolver problemas y/o demostrar y entender conceptos de incertidumbre.

El uso de conceptos de incertidumbre tiene un carácter muy teórico; es decir, generalmente los resultados del cálculo de incertidumbre carecen de una demostración experimental. Estas demostraciones serían sumamente difíciles debido a la necesidad de realizar un gran número de mediciones.

Las simulaciones con datos aleatorios a manera de “mediciones virtuales” pueden servir como un camino intermedio entre los argumentos teóricos y experimentales, respaldando los conceptos teóricos o ayudando a interpretarlos. Sin embargo, es preciso estar consciente de su riesgo principal: El “experimentador” establece las reglas en su programa de cálculo, de la manera como él entiende o interpreta el funcionamiento del sistema real, sin que esto significa que efectivamente funciona así. Además, la dispersión de los datos aleatorios no necesariamente coincide con la dispersión de los datos reales, o el programa de cálculo que genera los datos puede tener sus limitaciones. De esta manera, la simulación fácilmente puede estar sujeta a equivocaciones y por tanto no representar una verdadera demostración de como es un experimento.

REFERENCIAS

- [1] a) Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO 1995
b) Versión traducida al español: J. M. Figueroa, Guía BIPM/ISO para la expresión de la incertidumbre en las mediciones, CNM-MED-PT-002, CENAM 1997
- [2] M. G. Cox, P. M. Harris, GUM Supplements, http://www.npl.co.uk/ssfm/download/documents/ciegun_paper.pdf, 01-2002
- [3] W. Schmid, Fuentes de incertidumbre repetidas en la calibración y en el uso de instrumentos de medición, en “Seminario de Metrología Eléctrica Año 2000 – Memorias”, CENAM 2001, en preparación
- [4] A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill, p. 189ff