

# ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE LA DETERMINACIÓN DE LA DENSIDAD DEL AIRE

Luis O. Becerra, Ignacio Hernández, María E. Guardado  
Centro Nacional de Metrología, División de Metrología de Masa y Densidad  
km 4,5 Carretera a los Cués, Mpio. El Marqués

(442) 2 11 05 00, (442) 2 15 39 04, [lbecerra@cenam.mx](mailto:lbecerra@cenam.mx), [ihernan@cenam.mx](mailto:ihernan@cenam.mx), [mguardad@cenam.mx](mailto:mguardad@cenam.mx)

**Resumen:** La incertidumbre de la densidad del aire se evalúa normalmente considerando a sus variables de entrada sin correlación y como una función lineal. El presente trabajo propone los argumentos para tomar en cuenta o no el efecto de la correlación entre sus variables de entrada y las componentes debidas a los términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor en el análisis de la incertidumbre de la densidad del aire partiendo de la fórmula del CIPM.

## INTRODUCCIÓN

La densidad del aire es una magnitud de influencia para gran número de mediciones entre las que se encuentran: la medición de masa, la medición de densidad de líquidos y sólidos, las mediciones de volumen, etc. Debido a tal situación es importante conocer la forma de evaluar la densidad del aire así como su incertidumbre.

El presente trabajo presenta el proceso de evaluación de la densidad del aire así como la estimación de su incertidumbre.

## DESARROLLO

Usualmente la densidad del aire no es medida directamente, sino calculada tomando en cuenta las condiciones experimentales de temperatura, presión y humedad relativa o punto de rocío.

Los valores de dichas condiciones experimentales son introducidos en la ecuación 1 conocida como fórmula del CIPM para la determinación de la densidad del aire [1], [2], la cual tiene una incertidumbre relativa de  $\pm 1 \times 10^{-4}$

$$r = \frac{pM_a}{ZRT} \left[ 1 - x_v \left( 1 - \frac{M_v}{M_a} \right) \right] \quad (1)$$

donde,

$r$  densidad del aire ( $\text{kg/m}^3$ )

$M_a$  masa molar del aire húmedo

$M_v$  masa molar del agua

$R$  constante universal de los gases ideales

$p$  presión atmosférica (Pa)

$Z(x_v, p, P_{sv}, f)$  factor de compresibilidad

$T$  temperatura del aire (K)

$x_v(P_{sv}, f, p)$  fracción molar de vapor de agua

Las variables  $Z$ ,  $x_v$ ,  $f$ , y  $P_{sv}$  se obtienen de las siguiente fórmulas,

$$Z = 1 - \frac{p}{T} \left\{ \frac{a_0 + a_1(T - 273,15) + a_2(T - 273,15)^2}{[b_0 + b_1(T - 273,15)]x_v + [c_0 + c_1(T - 273,15)]x_v^2} \right\} + \frac{p^2}{T^2} (d + ex_v^2) \quad (2)$$

$$x_v = hf \frac{P_{sv}}{p} \quad (3)$$

$$f = a + bp + g(T - 273,15)^2 \quad (4)$$

$$P_{sv} = 1\text{Pa} \times \exp \left( AT^2 + BT + C + \frac{D}{T} \right) \quad (5)$$

donde,

$f$  es el factor de fugacidad

$P_{sv}$  es la presión de saturación de vapor (Pa)

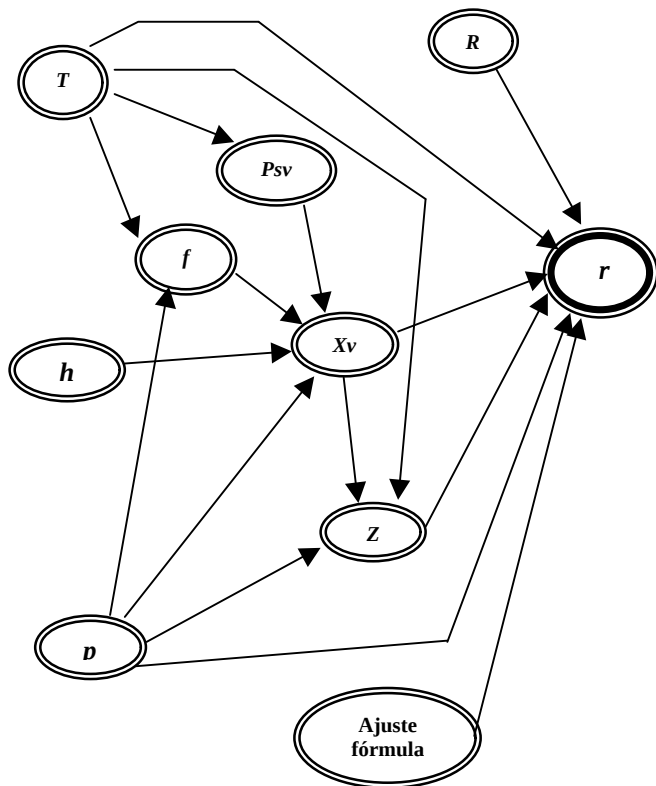
$h$  es el valor de humedad relativa (fracción)

$\exp$  es el número  $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 05$

los valores de las constantes son los siguientes,

|       |                                                                       |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|
| $M_a$ | 0,028 963 512 440 kg/mol                                              |
| $M_v$ | 0,018 015 kg/mol                                                      |
| $R$   | $8.314\,510 \pm 8,4 \times 10^{-6} \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| $a_0$ | $1,581\,23 \times 10^{-6} \text{ K Pa}^{-1}$                          |
| $a_1$ | $-2,933\,1 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$                            |
| $a_2$ | $1,104\,3 \times 10^{-10} \text{ K}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$             |
| $b_0$ | $5,707 \times 10^{-6} \text{ K Pa}^{-1}$                              |
| $b_1$ | $-2,051 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$                               |
| $c_0$ | $1,989\,8 \times 10^{-4} \text{ K Pa}^{-1}$                           |
| $c_1$ | $-2,376 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$                               |
| $d$   | $1,83 \times 10^{-11} \text{ K}^2 \text{ Pa}^{-2}$                    |
| $e$   | $-0,765 \times 10^{-8} \text{ K}^2 \text{ Pa}^{-2}$                   |
| $a$   | 1,000 62                                                              |
| $b$   | $3,14 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$                                 |
| $g$   | $5,6 \times 10^{-7} \text{ K}^{-2}$                                   |
| $A$   | $1,237\,884\,7 \times 10^{-5} \text{ K}^{-2}$                         |
| $B$   | $-1,912\,131\,6 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$                        |
| $C$   | 33,937 110 47                                                         |
| $D$   | $-6,343\,164\,5 \times 10^3 \text{ K}$                                |

La relación entre fuentes de incertidumbre y variables intermedias para la estimación de la densidad del aire se muestra de manera gráfica en la figura 1, siendo la constante universal de los gases ideales, la temperatura, la humedad relativa, la presión atmosférica y la incertidumbre propia de la fórmula las fuentes de incertidumbre para la estimación.[3]



**Fig. 1** Relación entre las variables que influyen en la estimación de la densidad del aire

La estimación de la incertidumbre de acuerdo a la GUM (Guía para la expresión de la incertidumbre en la medición por sus siglas en inglés) [4] establece la siguiente fórmula para funciones cuyas variables se encuentran sin correlación y cuyo modelo matemático sea aproximadamente lineal

$$u_r = \sqrt{\sum_i^n [c_i \cdot u(x_i)]^2} \quad (6)$$

donde,

- $u_r$  incertidumbre estándar combinada de la densidad del aire
- $c_i$  coeficiente de sensibilidad debido a la fuente de incertidumbre  $i$
- $u(x_i)$  incertidumbre estándar de la fuente de incertidumbre  $i$

En este ejemplo en particular, la estimación de los coeficientes de sensibilidad se realiza mediante la derivación parcial de la fórmula 1 en función de las variables  $i$  (7) a excepción del coeficiente de sensibilidad de la incertidumbre debida a la fórmula cuyo coeficiente de sensibilidad se toma con valor de 1, debido a que se tiene el modelo matemático que relaciona las fuentes de incertidumbre con la densidad del aire.

$$c_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (7)$$

Como las variables originales ( $T$ ,  $h$ ,  $p$  y  $R$ ) se encuentran relacionadas con la densidad del aire mediante variables intermedias ( $Z$ ,  $x_v$ ,  $P_{sv}$  y  $f$ ) es conveniente utilizar la regla de la cadena para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad.

Una vez estimados los coeficientes de sensibilidad y estimadas las incertidumbres estándar de las fuentes originales de incertidumbre se evalúa la incertidumbre de la densidad del aire utilizando la fórmula 6.

Parte importante de la estimación de la incertidumbre es la evaluación de los grados efectivos de libertad ya que en función de este valor se selecciona el factor de cobertura para expandir la incertidumbre al nivel de confianza deseado.

La evaluación de los grados efectivos de libertad se realiza utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite [4], la cual se muestra a continuación,

$$n_{ef} = \frac{u_r^4}{\sum_i^n \frac{u(x_i)^4}{n_i}} \quad (8)$$

donde

$n_{ef}$  grados efectivos de libertad de la estimación de la incertidumbre de la densidad del aire

$n_i$  grados de libertad de la estimación de la incertidumbre de la variable  $i$

Utilizando los grados efectivos de libertad obtenidos en 8 se selecciona el factor de cobertura de acuerdo al nivel de confianza deseado al expandir la incertidumbre.

$$U_r = k \cdot u_r \quad (9)$$

## EJEMPLO NUMÉRICO

Evaluando la densidad del aire con los siguientes valores de condiciones ambientales con sus respectivos valores de incertidumbre estándar y grados de libertad,

Presión atmosférica

$$80\,628 \text{ Pa} \pm 14 \text{ Pa } n_p = 139$$

Temperatura

$$294,15 \text{ K} \pm 0,061 \text{ K } n_t = 100$$

Humedad Relativa

$$0,5 \pm 0,011 n_h = 145$$

El valor de la constante universal de los gases ideales y su incertidumbre estándar así como la incertidumbre de la fórmula del CIPM se mencionaron anteriormente, en ambos casos se asignó el valor de 50 grados de libertad que corresponde a un nivel de confianza del 90 %.

Introduciendo los valores de las condiciones ambientales a las fórmulas 5, 4, 3, 2 y 1 se obtiene

$$r = 0,949\,547\,125 \text{ kg/m}^3$$

Al evaluar los coeficientes de sensibilidad se tienen los siguientes valores

$$c_p = 1,184\,92 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}$$

$$c_T = -0,003\,577\,031 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$c_h = -0,011\,099\,104 \text{ kg m}^{-3}$$

$$c_R = -0,114\,203\,618 \text{ kg m}^{-3} \text{ J}^{-1} \text{ mol K}$$

$$c_{\text{formula}} = 1$$

una vez que se tienen los coeficientes de sensibilidad y las incertidumbres estándar de las fuentes de incertidumbre se sustituyen los valores en la ecuación 6 y se obtiene el siguiente valor para la incertidumbre de la densidad del aire,

$$u_r = \pm 0,000\,32 \text{ kg/m}^3$$

Al evaluar los grados efectivos de libertad (8) se obtiene el siguiente valor,

$$n_{ef} = 315$$

con el cual se selecciona el factor de cobertura para expandir la incertidumbre a un nivel de confianza de aproximadamente 95,45%, ( $k \cong 2$ )

$$U_r = \pm 0,000\ 64\ \text{kg/m}^3 (\cong 95,45\%)$$

## CORRELACIÓN ENTRE FUENTES DE INCERTIDUMBRE

Hasta este momento se han considerado sin correlación los tres parámetros ambientales presión atmosférica, temperatura y humedad relativa, sin embargo esta condición es sumamente improbable.

En una serie de 245 mediciones simultáneas de presión atmosférica, temperatura y humedad relativa en un periodo de 18h00 realizada en el laboratorio de Patrones de Referencia del CENAM se obtuvieron los siguientes valores de correlación entre los parámetros ambientales, que no necesariamente son los mismos para todos los casos,

$$r(T, p) = 0,134$$

$$r(T, h) = -0,538$$

$$r(p, h) = -0,075$$

al sustituir estos valores en el término de correlación en la estimación de incertidumbre, se obtiene el siguiente valor,

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) = -3,532\ 73 \times 10^{-8} \text{ kg}^2/\text{m}^6 \quad (10)$$

que combinado con las contribuciones evaluadas anteriormente arroja el siguiente valor de incertidumbre estándar combinada

$$u_r = \pm 0,000\ 26\ \text{kg/m}^3$$

que representa un decremento de  $0,000\ 06\ \text{kg/m}^3$  (18,75% de la incertidumbre) debido a la correlación considerada entre las fuentes de incertidumbre.

## TÉRMINOS DE ORDEN SUPERIOR DE LA EXPANSIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR

La GUM [4] menciona que cuando la no linealidad de la función, en este caso la fórmula de la densidad del aire del CIPM, los términos de orden superior de la expansión de la serie de Taylor deben ser incluidas en la expresión de la incertidumbre combinada ( $u_r$ ).

La GUM menciona que cuando la distribución de cada uno de los variables es simétrica a su media, los términos del siguiente orden superior más importantes que deberán ser adicionados son los que se muestran en 11, que evaluando las derivadas parciales de segundo y tercer orden y sustituyendo sus valores se tiene,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j) \quad (11)$$

$$= 4,206\ 7 \times 10^{-13} \text{ kg}^2/\text{m}^6$$

que combinadas con el resto de contribuciones incluyendo la debida a la correlación entre sus variables de entrada resulta,

$$u_r = \pm 0,000\ 26\ \text{kg/m}^3$$

que prácticamente es el mismo valor de incertidumbre que antes de introducir este último término.

## DISCUSIÓN

En las mediciones se tratan de evitar las correlaciones entre las fuentes de incertidumbre, sin embargo son muchos los casos en los que esta relación existe y es muy difícil de controlar y por lo mismo imposibles de eliminar.

Se requiere de un estudio más profundo para confirmar que los factores de correlación utilizados en este ejemplo son representativos, sin embargo se puede apreciar que la correlación entre sus fuentes de incertidumbre reduce el valor final de la incertidumbre estándar combinada.

En lo que se refiere a la componente debida a la no-linealidad del modelo matemático en este caso en particular no representa ninguna aportación al presupuesto de incertidumbre por lo que no es necesario considerar los términos de orden superior de la expansión de la serie de Taylor para futuras estimaciones de la densidad del aire.

De este ejemplo surge la siguiente pregunta, si las componentes debidas a la correlación y a los términos de orden superior de la expansión de la serie de Taylor tuvieran un impacto importante en la estimación de la incertidumbre estándar combinada, ¿Cómo se pueden introducir estas componentes en la estimación de los grados efectivos de libertad asociados a la incertidumbre de la medición?

La fórmula de Welch-Satterthwaite se presenta únicamente para mediciones en las cuales las fuentes de incertidumbre no se encuentran correlacionadas y el modelo matemático que describe la medición es aproximadamente lineal, sin embargo se puede intuir que si estas componentes tienen influencia en la incertidumbre estándar su aportación debe estar incluida en la estimación de los grados efectivos de libertad.

## CONCLUSIONES

1. No es necesario involucrar en la estimación de la incertidumbre de la densidad del aire los términos de orden superior de expansión de la serie de Taylor, debido a que su aportación al presupuesto de incertidumbre no es significativa (modelo aproximadamente lineal)
2. El término debido a la correlación de las fuentes de incertidumbre si debe ser considerado debido a que existe correlación entre los tres parámetros ambientales. Los factores de correlación entre los parámetros ambientales deben ser caracterizados para cada caso en particular.
3. En lo que se refiere a la evaluación de los grados de libertad de la estimación de incertidumbre en general hace falta mucho trabajo por realizar en lo que se refiere al impacto de las correlaciones y la no-linealidad de los modelos matemáticos en los grados efectivos de libertad.

## REFERENCIAS

- [1] P. Giacomo, **“Equation for the determination of the density of moist air”** METROLOGÍA 18, 33-40 (1982)
- [2] R. S. Davis, **“Equation for the determination of the density of moist air”**, (1981/91) METROLOGÍA 1992, 29, 67-70
- [3] L. O. Becerra, M. E. Guardado, **“Estimación de la incertidumbre en la determinación de la densidad del aire”** CENAM por publicarse
- [4] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML **“Guide to the expression of Uncertainty on measurement”** Reprinted on 1995.