CENTRO NACIONAL DE METROLOGÍA

GUÍA PARA ESTIMAR LA INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN

Wolfgang A. Schmid y Ruben J. Lazos Martínez

Revisión 1

El Marqués, Qro., México, abril de 2004.

PREFACIO

Esta Guía tiene el propósito de unificar criterios en la estimación de las incertidumbres de las mediciones y está dirigido a los metrólogos del CENAM, en primera instancia, y a los responsables de estimar incertidumbres de medición en laboratorios de calibración, laboratorios de pruebas, laboratorios industriales y todos aquellos interesados en el tema.

La necesidad de este documento tiene su origen en las diversas interpretaciones de Guide to the expression of Uncertainty in Measurement, [1] (GUM), dentro y fuera del CENAM que han dado lugar a confusión, y a veces conflicto, entre sus usuarios.

Esta Guía observa los lineamientos establecidos en la GUM, sin embargo no pretende sustituirla como referencia maestra, por lo que se invita al usuario a consultarla en caso de duda. Se reconoce que la GUM, y por lo tanto esta Guía, adolecen de debilidades todavía no resueltas formalmente aun en el ámbito internacional. Sin embargo, por el momento no se encuentran otras opciones generalmente aceptadas.

Se ha procurado que el contenido de esta Guía sea técnicamente correcto, desde los puntos de vista matemático y metrológico, dentro de los límites de la GUM, aunque no se asegura que puedan resolverse únicamente con ella todas las dudas sobre la estimación de incertidumbres, por lo que puede ser necesaria la consulta de otros documentos más específicos. Esta Guía se apega estrictamente a las definiciones dadas en el Vocabulario Internacional de Metrología, [2] (VIM), considerando el propósito de unificación de criterios.

Varios metrólogos del CENAM han desarrollado ejemplos siguiendo este documento, los cuales están disponibles en publicaciones por separado.

Esta Guía refleja los resultados de un grupo de trabajo sobre incertidumbres en el CENAM, obtenidos después de aproximadamente dos años de trabajo.

Debe mencionarse el inapreciable valor de las numerosas opiniones de otros colegas del CENAM y de otros estudiosos de la metrología, cuyos conceptos seguramente están incluidos en esta Guía, pero cuya falta de trazabilidad nítida no permite distinguir a sus autores claramente.

La elaboración de este documento estuvo a cargo de W. Schmid y de R. Lazos quienes agradecen los valiosos comentarios recibidos.

El Marqués, Qro., abril de 2000.

NOTA: Este documento ha estado expuesto a las opiniones de los interesados durante casi un año antes de esta impresión, lapso en el cual se han recibido algunas sugerencias de correcciones tipográficas y de modificaciones muy ligeras de la forma.

El Marqués, Qro., marzo de 2001.

Esta primera revisión de la Guía incorpora mejoras con la intención de dar mayor precisión y claridad al texto, particularmente en la Sección 10.

El Marqués, Qro., abril de 2004.

GUÍA PARA ESTIMAR LA INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN

ÍNDICE: ***Página***

1. Propósitos de la Guía

Esta Guía

- establece, de forma general, lineamientos para estimar incertidumbres de medición de acuerdo a la GUM [1], la cual es considerada como la referencia maestra;
- subraya aspectos críticos en la estimación de las incertidumbres de medición;
- aclara algunos puntos que pueden dar lugar a confusiones;
- establece un esquema para estimar incertidumbres de la medición.

2. El Mensurando

El propósito de una medición es determinar el valor de una magnitud, llamada el mensurando, que de acuerdo al VIM [2], es el atributo sujeto a medición de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente. La definición del mensurando es vital para obtener buenos resultados de la medición. En no pocas ocasiones se mide algo distinto al propósito original.

La imperfección natural de la realización de las mediciones, hace imposible conocer con certeza absoluta el valor verdadero de una magnitud: Toda medición lleva implícita una **incertidumbre**, que de acuerdo al VIM, es un **parámetro que caracteriza la dispersión de los valores que pueden ser atribuidos razonablemente al mensurando.**

Una definición completa del mensurando incluye especificaciones sobre las magnitudes de entrada relevantes.

<u>Por similitud con la GUM, en esta Guía el término “magnitud de entrada” se usa para denotar también magnitudes de influencia.</u>

El resultado de una medición incluye la mejor estimación del valor del mensurando y una estimación de la incertidumbre sobre ese valor. La incertidumbre se compone de contribuciones de diversas fuentes, algunas de ellas descritas por las magnitudes de entrada respectivas. Algunas contribuciones son inevitables por la definición del propio mensurando, mientras otras pueden depender del principio de medición, del método y del procedimiento seleccionados para la medición.

Por ejemplo, en la medición de la longitud de una barra, la temperatura es una magnitud de entrada que afecta directamente al mensurando por expansión o contracción térmica de la barra. Otra magnitud de entrada es la fuerza de contacto, presente cuando se usan instrumentos que requieren contacto mecánico como los tornillos micrométricos, calibradores vernier, etc.

También pueden influir en el resultado de la medición, y por lo tanto en la incertidumbre, algunos atributos no cuantificables en cuyo caso es siempre recomendable reducir en lo posible sus efectos, preferentemente haciendo uso de criterios de aceptación en las actividades tendientes a reducir tales efectos.

Por ejemplo, la limpieza de las masas es un aspecto crítico en la calibración de masas de alta exactitud, lo cual obliga a observar estrictamente criterios para limpiarlas apropiadamente.

El principio de medición es el fundamento científico usado para realizar una medición. El conocimiento del principio de medición permite al metrólogo dominar la medición, esto es, modificarla, diseñar otra, evaluar su conveniencia, etc., además es indispensable para estimar la incertidumbre de la medición.

El método de medición y el procedimiento de medición son descripciones de la manera de llevar a cabo la medición, la primera genérica, la segunda específica.

El principio, el método y el procedimiento de medición son determinantes en el valor de la incertidumbre de la medición. Un conocimiento insuficiente de ellos muy probablemente conducirá a una estimación equivocada, o incompleta en el mejor de los casos, de la incertidumbre de la medición.

Para la aplicación de este documento se supondrá que el principio, el método y el procedimiento han sido previamente determinados.

La definición del mensurando usualmente alude, casi siempre de manera implícita, a una estimación de la incertidumbre que se requiere. Es notable el alto riesgo que se corre cuando la definición del mensurando no es acorde con la estimación de la incertidumbre requerida.

Por ejemplo, si se manifiesta al mensurando simplemente como el diámetro de una moneda de un peso, la incertidumbre requerida es mayor que cuando el mensurando se determina como el diámetro del círculo que circunscribe la moneda.

3. Modelo físico

Pretender estudiar el proceso de medición de manera exacta y completa está usualmente fuera de las actividades rutinarias del metrólogo, más aún, es el propósito de la investigación científica, cuya solución pocas veces se vislumbra. Por lo tanto, es necesaria la simplificación del fenómeno o de la situación real conservando las características más relevantes para el propósito pretendido, mediante la construcción de un modelo para la medición.

Un modelo físico de la medición consiste en el conjunto de suposiciones sobre el propio mensurando y las variables físicas o químicas relevantes para la medición. Estas suposiciones usualmente incluyen:

a) relaciones fenomenológicas entre variables;

b) consideraciones sobre el fenómeno como conservación de cantidades, comportamiento temporal, comportamiento espacial, simetrías;

c) consideraciones sobre propiedades de la sustancia como homogeneidad e isotropía.

Una medición física, por simple que sea, tiene asociado un modelo que sólo aproxima el proceso real.

4. Modelo matemático

El modelo físico se representa por un modelo descrito con lenguaje matemático. El modelo matemático supone aproximaciones originadas por la representación imperfecta o limitada de las relaciones entre las variables involucradas.

Considerando a la medición como un proceso, se identifican magnitudes de entrada denotadas por el conjunto

$$\{X_i\}$$

expresión en la cual el índice i toma valores entre 1 y el número de magnitudes de entrada N.

La relación entre las magnitudes de entrada y el mensurando Y como la magnitud de salida se representa como una función

$$Y = f(\{X_i\}) = f(X_1, X_2, \ldots , X_N) \qquad (4.1)$$

representada por una tabla de valores correspondientes, una gráfica o una ecuación, en cuyo caso y para los fines de este documento se hará referencia a una relación funcional.

Por ejemplo, la viscosidad es proporcional al tiempo de flujo por un viscosímetro capilar como relación funcional, en contraste al desconocimiento de su relación funcional con la temperatura.

Aunque para el propósito de este trabajo se considerará Y como un escalar, puede aplicarse el mismo formalismo para elementos matemáticos más complejos como vectores o matrices.

En este trabajo se denota con x_i al mejor estimado de las magnitudes de entrada X_i.

Los valores de las magnitudes de entrada pueden ser resultados de mediciones recientes realizadas por el usuario o tomados de fuentes como certificados, literatura, manuales, etc.

El mejor estimado y del valor del mensurando es el resultado de calcular el valor de la función f evaluada en el mejor estimado de cada magnitud de entrada x_i,

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right) \qquad (4.2)$$

En algunas ocasiones se toma el mejor estimado de Y como el promedio de varios valores y_j del mensurando obtenidos a partir de diversos conjuntos de valores $\{X_i\}_j$ de las magnitudes de entrada [1, Sec. 4.1.4].

5. Identificación de las fuentes de incertidumbre[1]

Una vez determinados el mensurando, el principio, el método y el procedimiento de medición, se identifican las posibles fuentes de incertidumbre.

Éstas provienen de los diversos factores involucrados en la medición, por ejemplo,

- los resultados de la calibración del instrumento;
- la incertidumbre del patrón o del material de referencia;
- la repetibilidad de las lecturas;
- la reproducibilidad de las mediciones por cambio de observadores, instrumentos u otros elementos;
- características del propio instrumento, como resolución, histéresis, deriva, etc.;
- variaciones de las condiciones ambientales;
- la definición del propio mensurando;
- el modelo particular de la medición;
- variaciones en las magnitudes de influencia.

No es recomendable desechar alguna de las fuentes de incertidumbre por la suposición de que es poco significativa sin una cuantificación previa de su contribución, comparada con las demás, apoyada en mediciones. Es preferible la inclusión de un exceso de fuentes que ignorar algunas entre las cuales pudiera descartarse alguna importante. No obstante, siempre estarán presentes efectos que la experiencia, conocimientos y actitud crítica del metrólogo permitirán calificar como irrelevantes después de las debidas consideraciones.

Por ejemplo, en la calibración de termómetros de mercurio en vidrio aparece una pequeña contribución de la temperatura ambiente, pero se considera despreciable aquella contribución debida a la radiación electromagnética en el ambiente.

6. Cuantificación

En la literatura [1] se distinguen dos métodos principales para cuantificar las fuentes de incertidumbre: El *Método de Evaluación Tipo A* está basado en un análisis estadístico de una serie de mediciones, mientras el *Método de Evaluación Tipo B* comprende todas las demás maneras de estimar la incertidumbre.[2]

Cabe mencionar que esta clasificación no significa que exista alguna diferencia en la naturaleza de los componentes que resultan de cada uno de los dos tipos de evaluación,

[1] La GUM no utiliza el término "fuente de incertidumbre", el cual se emplea en este documento por simplicidad en el lenguaje.

[2] Por simplicidad del lenguaje, en este documento se llaman "incertidumbres tipo A" a aquéllas evaluadas con el Método de Evaluación Tipo A y de manera similar para el tipo B.

puesto que ambos tipos están basados en distribuciones de probabilidad. La única diferencia es que en una evaluación tipo A se estima esta distribución basándose en mediciones repetidas obtenidas del mismo proceso de medición mientras en el caso de tipo B se supone una distribución con base en experiencia o información externa al metrólogo. En la práctica esta clasificación no tiene consecuencia alguna en las etapas siguientes para estimar la incertidumbre combinada.

6.1. Evaluación tipo A

La incertidumbre de una magnitud de entrada X_i obtenida a partir de observaciones repetidas bajo condiciones de repetibilidad, se estima con base en la dispersión de los resultados individuales.

Si X_i se determina por n mediciones independientes, resultando en valores q_1 , q_2 , ... , q_n , el mejor estimado x_i para el valor de X_i es la media de los resultados individuales:

$$x_i = \bar{q} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} q_j \tag{6.1}$$

La dispersión de los resultados de la medición q_1 , q_2 , ... , q_n para la magnitud de entrada X_i se expresa por su desviación estándar experimental:

$$s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (q_j - \bar{q})^2} \tag{6.2}$$

La incertidumbre estándar $u(x_i)$ de X_i se obtiene finalmente mediante el cálculo de la desviación estándar experimental de la media:

$$u(x_i) = s(\bar{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \tag{6.3}$$

Así que resulta para la incertidumbre estándar de X_i:

$$\boxed{u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})^2}} \tag{6.4}$$

Para una medición que se realiza por un método bien caracterizado y bajo condiciones controladas, es razonable suponer que la distribución (dispersión) de los q_j no cambia, o sea se mantiene prácticamente igual para mediciones realizadas en diferentes días, por distintos metrólogos, etc. (esto es, la medición está bajo control estadístico). En este caso esta componente de la incertidumbre puede ser más confiablemente estimada con la desviación estándar s_p **obtenida de un solo experimento anterior**, que con la desviación estándar experimental $s(q)$ obtenida por un número n de mediciones, casi siempre pequeño, según la ec. (6.2).

La incertidumbre estándar de la media se estima en este caso por:

$$u(x_i) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} \qquad (6.5)$$

Cabe mencionar que n es el número de mediciones repetidas para evaluar $x_i = \bar{q}$, según la ec. (6.1), mientras s_p se determinó por un número distinto (y grande) de mediciones.

No se puede dar una recomendación general para el número ideal de las repeticiones n, ya que éste depende de las condiciones y exigencias (meta para la incertidumbre) de cada medición específica. Hay que considerar que:

- Aumentar el número de repeticiones resulta en una reducción de la incertidumbre por repetibilidad, la cual es proporcional a $1/\sqrt{n}$.
- Un número grande de repeticiones aumenta el tiempo de medición, que puede ser contraproducente, si las condiciones ambientales u otras magnitudes de entrada no se mantienen constantes en este tiempo.
- En pocos casos se recomienda o se requiere n mayor de 10 (ver Secs. 10.1 y 10.2). Por ejemplo cuando se caracterizan instrumentos o patrones, o se hacen mediciones o calibraciones de alta exactitud.
- Para determinar el impacto que tiene n en la incertidumbre expandida puede estimarse su influencia en el número de grados efectivos de libertad, de ser aplicable este concepto (ver Sec.10.2).

Otras fuentes de incertidumbre que se evalúan con este método son la reproducibilidad y las obtenidas al hacer una regresión lineal.

6.2. Evaluación tipo B

En una evaluación tipo B de la incertidumbre de una magnitud de entrada se usa información externa u obtenida por experiencia. Las fuentes de información pueden ser:

- Certificados de calibración.
- Manuales del instrumento de medición, especificaciones del instrumento.
- Normas o literatura.
- Valores de mediciones anteriores.
- Conocimiento sobre las características o el comportamiento del sistema de medición.

6.3. Distribuciones de probabilidad

La cuantificación de una fuente de incertidumbre incluye la asignación de un valor y la determinación de la distribución a la cual se refiere este valor. Las distribuciones que aparecen más frecuentemente son:

a) Distribución normal

Los resultados de una medición repetida afectada por magnitudes de influencia que varían aleatoriamente, generalmente siguen en buena aproximación una distribución normal. En particular, la distribución de la media de una serie de mediciones repetidas se aproxima a una normal independientemente de la distribución de las lecturas individuales[3] . También la incertidumbre indicada en certificados de calibración se refiere generalmente a una distribución normal.

b) Distribución rectangular

En una distribución rectangular cada valor en un intervalo dado tiene la misma probabilidad, o sea la función de densidad de probabilidad es constante en este intervalo. Ejemplos típicos son la resolución de un instrumento digital o la información técnica sobre tolerancias de un instrumento. En general, cuando exclusivamente hay conocimiento de los límites superior e inferior del intervalo de variabilidad de la magnitud de entrada, lo más conservador es suponer una distribución rectangular.

c) Distribución triangular:

Si además del conocimiento de los límites superior e inferior hay evidencia de que la probabilidad es más alta para valores en el centro del intervalo y se reduce hacía los límites, puede ser más adecuado basar la estimación de la incertidumbre en una distribución triangular.

Por ejemplo, en un baño termostático, que se utiliza para medir la densidad de un líquido, la temperatura puede tener una ligera deriva. Si se mide la temperatura antes y después de la medición de la densidad (resultando en T_1 y T_2), se pude suponer para el momento de la medición de la densidad una temperatura de $(T_1+T_2)/2$ con una distribución triangular entre T_1 y T_2 .

d) Otras distribuciones

Pueden encontrarse también distribuciones como la U, en la cual los extremos del intervalo presentan los valores con probabilidad máxima, típicamente cuando hay comportamientos oscilatorios subyacentes.

[3] Esta afirmación está justificada por el Teorema del Límite Central, sección 10.2.

7. Determinación de las incertidumbres estándar

Con el fin de combinar contribuciones de la incertidumbre que tienen distribuciones diferentes, es necesario representar los valores de las incertidumbres originales como incertidumbres estándar. Para ello se determina la desviación estándar de la distribución asignada a cada fuente.

a) Distribución normal:

La desviación estándar experimental de la media calculada a partir de los resultados de una medición repetida según la ec. (6.4) ya representa la incertidumbre estándar.

Cuando se dispone de valores de una incertidumbre expandida U y la distribución del mensurando es o se supone normal, como los presentados por ejemplo en certificados de calibración, se divide U entre el factor de cobertura k, obtenido ya sea directamente o a partir de un nivel de confianza dado (ver Sec.10.1):

$$u(x_i) = \frac{U}{k} \tag{7.1}$$

b) Distribución rectangular:

Si la magnitud de entrada X_i tiene una distribución rectangular con el límite superior a_+ y el límite inferior a_- , el mejor estimado para el valor de X_i está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{7.2}$$

y la incertidumbre estándar se calcula por (ver Anexo A):

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}} \tag{7.3}$$

o por

$$u(x_i) = \frac{a/2}{\sqrt{3}} \tag{7.4}$$

donde *a/2* es el semiancho del intervalo a con

$$a = a_+ - a_- \tag{7.5}$$

Una aplicación típica es la resolución de un instrumento digital. También la incertidumbre relacionada con el número finito de cifras significativas de datos tomados de la literatura puede ser tratada con esta distribución (siempre y cuando no haya indicios que la incertidumbre en realidad es mayor que la incertidumbre relacionada con la última cifra significativa). Si se aplica a la resolución o a datos tomados de la literatura, a corresponde al último dígito significativo o a la última cifra significativa respectivamente.

c) Distribución triangular:

Como en una distribución rectangular, para una magnitud de entrada X_i que tiene una distribución triangular con los límites a_+ y a_- , el mejor estimado para el valor de X_i está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{7.6}$$

La incertidumbre estándar se calcula en este caso por:

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{24}} = \frac{a/2}{\sqrt{6}} \tag{7.7}$$

con a definido por la ec. (7.5).

8. Combinación

El resultado de la combinación de las contribuciones de todas las fuentes es la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$.

La contribución $u_i(y)$ de cada fuente a la incertidumbre combinada depende de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la propia fuente y del impacto de la fuente sobre el mensurando. Es posible encontrar que una pequeña variación de alguna de las magnitudes de influencia tenga un impacto importante en el mensurando, y viceversa.

Se determina $u_i(y)$ por el producto de $u(x_i)$ y su coeficiente de sensibilidad c_i (o factor de sensibilidad):

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i) \tag{8.1}$$

8.1. Coeficiente de sensibilidad

El coeficiente de sensibilidad describe qué tan sensible es el mensurando con respecto a variaciones de la magnitud de entrada correspondiente (ver Anexo B). Para su determinación existen varios métodos:

a) Determinación a partir de una relación funcional

Si el modelo matemático para el mensurando $Y = f(X_1 , X_2 , ... , X_N)$ describe la influencia de la magnitud de entrada X_i suficientemente bien mediante una relación funcional, el coeficiente de sensibilidad c_i se calcula por la derivada parcial de f con respecto a X_i :

$$c_i = \left. \frac{\partial f(X_1, \ldots, X_N)}{\partial X_i} \right|_{X_1 = x_1 \ldots X_N = x_N} \quad (8.2)$$

b) Otros métodos de determinación:

Si la influencia de la magnitud de entrada X_i en el mensurando Y no está representada por una relación funcional, se determina el coeficiente de sensibilidad c_i por una estimación del impacto de una variación de X_i en Y según:

$$c_i = \frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \quad (8.3)$$

Esto es, manteniendo constantes las demás magnitudes de entrada, se determina el cambio de Y producido por un cambio en X_i por una medición o a partir de la información disponible (como una gráfica o una tabla).

8.2. Propagación de la incertidumbre para magnitudes de entrada no correlacionadas

En el caso de magnitudes de entrada no correlacionadas, la incertidumbre combinada $u_c(y)$ se calcula por la suma geométrica de las contribuciones particulares:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \quad (8.4)$$

Considerando (8.1) y (8.2) resulta finalmente:

$$\boxed{u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[c_i \cdot u(x_i)\right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u(x_i)\right]^2}} \quad (8.5)$$

La regla presentada en ec. (8.5) es llamada *ley de propagación de incertidumbre*. Note que la última expresión en esta ecuación se aplica cuando se dispone de la relación funcional entre Y y $\{X_i\}$. La *ley de propagación de incertidumbre* se debe aplicar exclusivamente para combinar incertidumbres estándar. De ninguna manera debe ser utilizada para combinar *intervalos de confianza*[4].

8.3. Magnitudes de entrada relacionadas con más de una fuente de incertidumbre

[4] El concepto de *intervalo de confianza* es tratado en la sección 10.1

En la mayoría de los casos una magnitud de entrada X_i es afectada por varias fuentes de incertidumbre, que pueden ser por ejemplo la resolución del instrumento, la dispersión de datos obtenidas por mediciones repetidas y la incertidumbre de la calibración del instrumento. En este caso hay dos maneras equivalentes de calcular la incertidumbre combinada.

a) Como primera alternativa, se calcula la incertidumbre total (combinada) relacionada con cada magnitud de entrada X_i por la suma geométrica de las incertidumbres individuales:

$$u(x_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{M_i} \left[u_j(x_i)\right]^2} \tag{8.6}$$

donde $u_j(x_i)$ es la incertidumbre estándar de la fuente de incertidumbre número j de las M_i fuentes relacionadas con la magnitud de entrada X_i . Después se introducen los valores de $u(x_i)$ en la ec. (8.5).

b) Si uno está interesado en ver el efecto particular que tiene cada una de las fuentes en la incertidumbre combinada $u_c(y)$, cada fuente puede entrar individualmente en la ec. (8.5), sustituyendo el número de magnitudes de entrada N en la suma por el número total de fuentes de incertidumbre. Cabe mencionar que el coeficiente de sensibilidad c_i es igual para todas las fuentes de incertidumbre relacionadas con la misma magnitud de entrada X_i .

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^{\,2} \sum_{j=1}^{M_i} \left[u_j(x_i)\right]^2} \tag{8.7}$$

Cuando el coeficiente de sensibilidad c_i es cero o cuando la función no admite una representación lineal adecuada (únicamente con la primera derivada) en el intervalo $\pm u(x_i)$ es conveniente y aun indispensable considerar términos de segundo orden (que dependen de las segundas derivadas) (ver 5.1.2.Nota de [1]).

Por ejemplo, si $y = x^2$ y el valor de $x=0$, como en un detector de nulos con curva de respuesta cuadrática, la contribución de primer orden es nula.

Es posible mejorar la aproximación anterior y realizar el cálculo riguroso para combinar las contribuciones, el cual, sin embargo, puede ser más o menos laborioso dependiendo del modelo matemático [7].

8.4. Cálculo con incertidumbres relativas

Si el modelo matemático se compone de productos de las magnitudes de entrada X_i :

$$f(X_1,...,X_N) = const \cdot \prod_{i=1}^{N} (X_i)^{p_i} \qquad (8.8)$$

donde *const* es una constante y los exponentes p_i son constantes reales (positivas o negativas), el cálculo (numérico) de la incertidumbre combinada se facilita utilizando incertidumbres relativas. Los coeficientes de sensibilidad en este caso son p_i , y la ley de propagación de incertidumbre (8.5) para calcular la incertidumbre combinada relativa $u_{c,rel}(y)$ se simplifica:

$$u_{c,rel}(y) \;=\; \frac{u_c(y)}{y} \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[p_i \cdot u_{rel}(x_i)\right]^2} \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[p_i \cdot \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2} \qquad (8.9)$$

Un caso particular muy común es que todos los exponentes p_i son +1 o -1, o sea Y es un producto o cociente de las magnitudes de entrada, puesto que en este caso las coeficientes de sensibilidad son 1 y la incertidumbre combinada relativa $u_{c,rel}(y)$ es la suma geométrica de las incertidumbres relativas de las magnitudes de entrada:

$$u_{c,rel}(y) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[u_{rel}(x_i)\right]^2} \qquad (8.10)$$

8.5. Propagación de la incertidumbre para magnitudes de entrada correlacionadas

Si algunas de las magnitudes de entrada están correlacionadas, debe considerarse las covarianzas entre las magnitudes correlacionadas y la ec. (8.5) se modifica a

$$\boxed{u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u(x_i)\right]^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial X_j} \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(X_i, X_j)}} \qquad (8.11)$$

donde $r(X_i\,, X_j)$ es el factor de correlación entre las magnitudes de entrada X_i y X_j.

9. Correlación

A menudo los resultados de mediciones de dos magnitudes de entrada están ligados, ya sea porque existe una tercera magnitud que influye sobre ambas, porque se usa el mismo instrumento para medir o el mismo patrón para calibrar [3], o por alguna otra razón.

Por ejemplo, en la calibración gravimétrica de medidores de volumen son magnitudes de entrada las temperaturas del agua y del ambiente. Estas temperaturas están relacionadas aun cuando sus valores puedan ser diferentes. La temperatura del agua será más alta cuando la temperatura ambiente lo sea y bajará cuando lo haga la temperatura ambiente, es decir existe una correlación entre estas magnitudes.

Desde el punto de vista estadístico, dos variables son independientes cuando la probabilidad asociada a una de ellas no depende de la otra, esto es, si q y w son dos variables aleatorias independientes, la probabilidad conjunta se expresa como el producto de las probabilidades de las variables respectivas

$$p(q,w) = p(q) \cdot p(w) \tag{9.1}$$

Frecuentemente, se encuentran magnitudes de entrada que no son independientes. La independencia lineal de dos variables puede estimarse estadísticamente con el coeficiente de correlación

$$r(q,w) = \frac{u(q,w)}{u(q) \cdot u(w)} \tag{9.2}$$

En el denominador aparecen las incertidumbres estándar de las variables aludidas y en el numerador la covarianza de las mismas.

La covarianza puede ser estimada (ver ejemplo en Sec. H.2 de [1]):

a) por medio de las relaciones funcionales entre ambas variables y la tercera que influye sobre ellas (ec. F.2 de [1]),

b) a partir de un conjunto de n valores de q y w según:

$$u(q,w) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(q_k - \bar{q}\right) \cdot \left(w_k - \bar{w}\right) \tag{9.3}$$

Un valor de $r = 0$ indica independencia de q y w. Los valores de $r = +1$ o -1 indican una correlación lineal total.

10. Incertidumbre expandida

La forma de expresar la incertidumbre como parte de los resultados de la medición depende de la conveniencia del usuario. A veces se comunica simplemente como la incertidumbre estándar combinada, otras ocasiones como un cierto número de veces tal incertidumbre, algunos casos requieren se exprese en términos de un nivel de confianza dado, etc. En cualquier caso, es indispensable comunicar sin ambigüedades la manera en que la incertidumbre está expresada.

10.1. Factor de cobertura y nivel de confianza

La incertidumbre estándar u_c tiene un valor igual a la desviación estándar de la función de distribución del mensurando. El intervalo centrado en el mejor estimado del mensurando contiene el valor verdadero con una probabilidad p de 68% aproximadamente, bajo la suposición de que los posibles valores del mensurando siguen una distribución normal.

Generalmente se desea una probabilidad mayor de 68%, lo que se obtiene expandiendo este intervalo por un factor k, llamado factor de cobertura. El resultado se llama incertidumbre expandida U

$$U = k \cdot u_c \qquad (10.1)$$

La incertidumbre expandida U indica entonces un intervalo, llamado *intervalo de confianza*, que representa una fracción p de los valores que puede probablemente tomar el mensurando. El valor de p es llamado el nivel de confianza y puede ser elegido a conveniencia.

En el medio industrial, a menudo se elige el nivel de confianza de manera tal que corresponda a un factor de cobertura como un número entero de desviaciones estándar en una distribución normal. Por ejemplo, $k = 1$ corresponde a $p = 68,27$ %, $k = 2$ corresponde a $p = 95,45\%$ y $k = 3$ a $p = 99,73$ %.

La relación entre el factor de cobertura k y el nivel de confianza p depende de la distribución de probabilidad del mensurando. *Por ejemplo, en una distribución rectangular p=57,74 % si k=1, y para logar un nivel de confianza de 95,45 % se requiere multiplicar por k=1,65.*

Cuando es necesaria una estimación más rigurosa de la incertidumbre expandida se consideran las Secs. 10.2 hasta 10.4; cuando no son necesarias estimaciones muy rigurosas de la incertidumbre, como en mediciones de baja exactitud, entonces es suficiente seguir con la Sec. 10.4.

10.2. Distribución t de Student

Frecuentemente, los valores del mensurando siguen una distribución normal. Sin embargo, el mejor estimado del mensurando, la media (obtenida por muestreos de n mediciones repetidas) dividida entre su desviación estándar, sigue una distribución llamada t de Student [5], la cual refleja las limitaciones de la información disponible debidas al número finito de mediciones. Esta distribución coincide con la distribución normal en el límite cuando n tiende a infinito, pero difiere considerablemente de ella cuando n es pequeño.

La distribución t de Student es caracterizada por un parámetro ν llamado número de grados de libertad.

Por lo anterior, el intervalo correspondiente al nivel de confianza p, dado antes por la ec. 10.1, se calcula ahora por

$$U = t_p(\nu) \cdot u_c \qquad (10.2)$$

El factor $t_p(\nu)$ indica los límites del intervalo correspondiente al nivel de confianza p de la distribución y su valor siempre es mayor o igual que el factor k (tomado de la distribución normal). Sus valores se encuentran en tablas.

Cuando se combinan las fuentes de incertidumbre con sus respectivas distribuciones para obtener la incertidumbre combinada u_c del mensurando, el Teorema del Límite Central ([4], Sec. G2.3 de [1]) permite aproximar la distribución resultante por una distribución normal. La aproximación será mejor mientras más grande sea el número de fuentes de incertidumbre y sus contribuciones sean similares, independientemente de la forma particular de sus distribuciones.

Nuevamente, la disponibilidad limitada de información hace necesario el uso de la distribución t de Student para determinar la incertidumbre expandida de manera rigurosa (con la suposición de que los valores del mensurando obedecen una distribución normal). El número efectivo de grados de libertad ν_{ef} para esta situación se discute en la Sec. 10.3.

Cuando sólo es relevante la contribución de una fuente cuya distribución no es normal, lo más conveniente es estimar la incertidumbre expandida directamente de los parámetros de la distribución.

Por ejemplo, cuando las lecturas obtenidas con un instrumento de baja exactitud son idénticas debido a la resolución del instrumento y las otras fuentes de incertidumbre son insignificantes, es plausible suponer que el mensurando sigue una distribución rectangular cuyos límites están determinados por el valor de la escala del instrumento. Entonces puede estimarse directamente el ancho del intervalo que contiene la fracción p de los valores que pueden atribuirse razonablemente al mensurando.

10.3. Grados de libertad

De cierta manera el número ν de grados de libertad asociado a una distribución de una magnitud (X_i o Y) puede considerarse una medida de incertidumbre de la incertidumbre de esa magnitud. Entre mayor sea ν la estimación de la incertidumbre será más confiable.

El número efectivo de grados de libertad ν_{ef} del mensurando considera el número de grados de libertad ν_i de cada fuente de incertidumbre.

En la estimación de incertidumbres por el método tipo A, ν_i depende directamente del número de datos considerados y disminuye conforme el número de parámetros estimados a partir de los mismos datos. La repetibilidad de una medición, estimada por la desviación estándar experimental de n lecturas tiene n-1 grados de libertad. Una regresión lineal de M puntos mediante una ecuación de m parámetros tiene M-m grados de libertad.

Si la incertidumbre se estima por un método tipo B, la determinación del número de grados de libertad implica el criterio del metrólogo soportado por su experiencia, aun cuando sea subjetiva, para determinar la incertidumbre relativa de la propia incertidumbre, y calcular el número de grados de libertad para esa fuente específica *i* con la ecuación (ec. G.3 de [1]):

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u(x_i)}{\Delta u(x_i)}\right]^{2} \qquad (10.3)$$

La cantidad $\Delta u(x_i)$ es una estimación de la incertidumbre de la incertidumbre $u(x_i)$ de la fuente i cuantificada por el metrólogo. Es recomendable aproximar el resultado del cálculo con la ecuación anterior al entero cercano más bajo.

Por ejemplo, si $\Delta u(x_i)$ es cero, es decir, el metrólogo está completamente seguro del valor de $u(x_i)$, el número de grados de libertad asociado a esa fuente es infinito. Si el metrólogo considera que $u(x_i)$ tiene una incertidumbre del 50%, el número de grados de libertad es de sólo 2, y si la considera del 20% el número de grados de libertad asciende a 12.

Se observa también que un valor mayor de $u(x_i)$, al ser una estimación más conservadora, puede traer consigo un menor valor de $\Delta u(x_i)$ y por consiguiente un mayor número de grados de libertad.

Siguiendo [1], el número efectivo de grados de libertad se calcula según la ecuación de Welch-Satterthwaite, aun cuando existan observaciones sobre su validez merecedoras de atención [6]. Esta ecuación puede escribirse en términos de la relación entre la contribución de la fuente i y la incertidumbre combinada como:

$$\frac{1}{\nu_{ef}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\frac{u_i\,(y)}{u_c\,(y)}\right)^4}{\nu_i} \qquad (10.4)$$

Si el valor de ν_{ef} resultante no es entero, generalmente se considera ν_{ef} como el entero menor más próximo.

Un análisis de la ecuación anterior muestra el dominio de las fuentes con pocos grados de libertad en el cálculo de ν_{ef} , sobre todo de aquellas cuyas contribuciones son grandes a la incertidumbre combinada. De hecho una fuente cuya contribución es alta y con pocos grados de libertad, es determinante del valor de ν_{ef} .

Por ejemplo, si la repetibilidad contribuye con el 80% de la incertidumbre combinada, se estima con 3 grados de libertad, y cada una de las otras fuentes tiene un número infinito de grados de libertad, el número efectivo de grados de libertad será aproximadamente de 7. Si contribuyera con el 60%, se obtendrían 23 grados de libertad.

10.4. Incertidumbre expandida

Resumiendo, si la función de distribución de probabilidad del mensurando y es normal, de manera rigurosa la incertidumbre expandida se calcula de acuerdo a la ec. (10.2) como

$$U = u_c \cdot t_p(\nu_{ef})$$

donde $t_p(\nu_{ef})$ es el factor derivado de la distribución t de Student a un nivel de confianza p y ν_{ef} grados de libertad y obtenido de tablas [1]. Comparando la ec. (10.1) con la ec. (10.2) es evidente que el factor de cobertura *k* de la ec. (10.1) corresponde al valor de $t_p(\nu_{ef})$.

Frecuentemente, cuando ν_{ef} es suficientemente grande, no se encuentra diferencia significativa en los resultados numéricos obtenidos con la ec. (10.2) para un *p* dado de aquéllos obtenidos con la ec. (10.1) tomando *k* de la distribución normal para el mismo *p*. Una buena práctica es realizar el cálculo riguroso con la ec. (10.2) y entonces decidir sobre la conveniencia de usar simplemente la ec. (10.1).

10.5. Expresión de la incertidumbre

En el CENAM, la política [8] es expresar los resultados de sus mediciones con un nivel de confianza no menor al 95%, en vista de la costumbre en laboratorios similares.

Es difícil asegurar un valor preciso de la incertidumbre debido a las múltiples aproximaciones realizadas durante su estimación. Por ello, generalmente los valores de $t_p(\nu_{ef})$ para p = 95% se aproximan por los que corresponden a $t_p(\nu_{ef})$ para p = 95,45% con el fin de obtener un valor de k = 2,00 en el límite de una distribución normal.

Los valores de $t_p(\nu_{ef})$ para p=95,45% se muestran en la siguiente tabla [5]:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	∞
$t_p(\nu_{ef})$	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,32	2,28	2,13	2,05	2,025	2,000

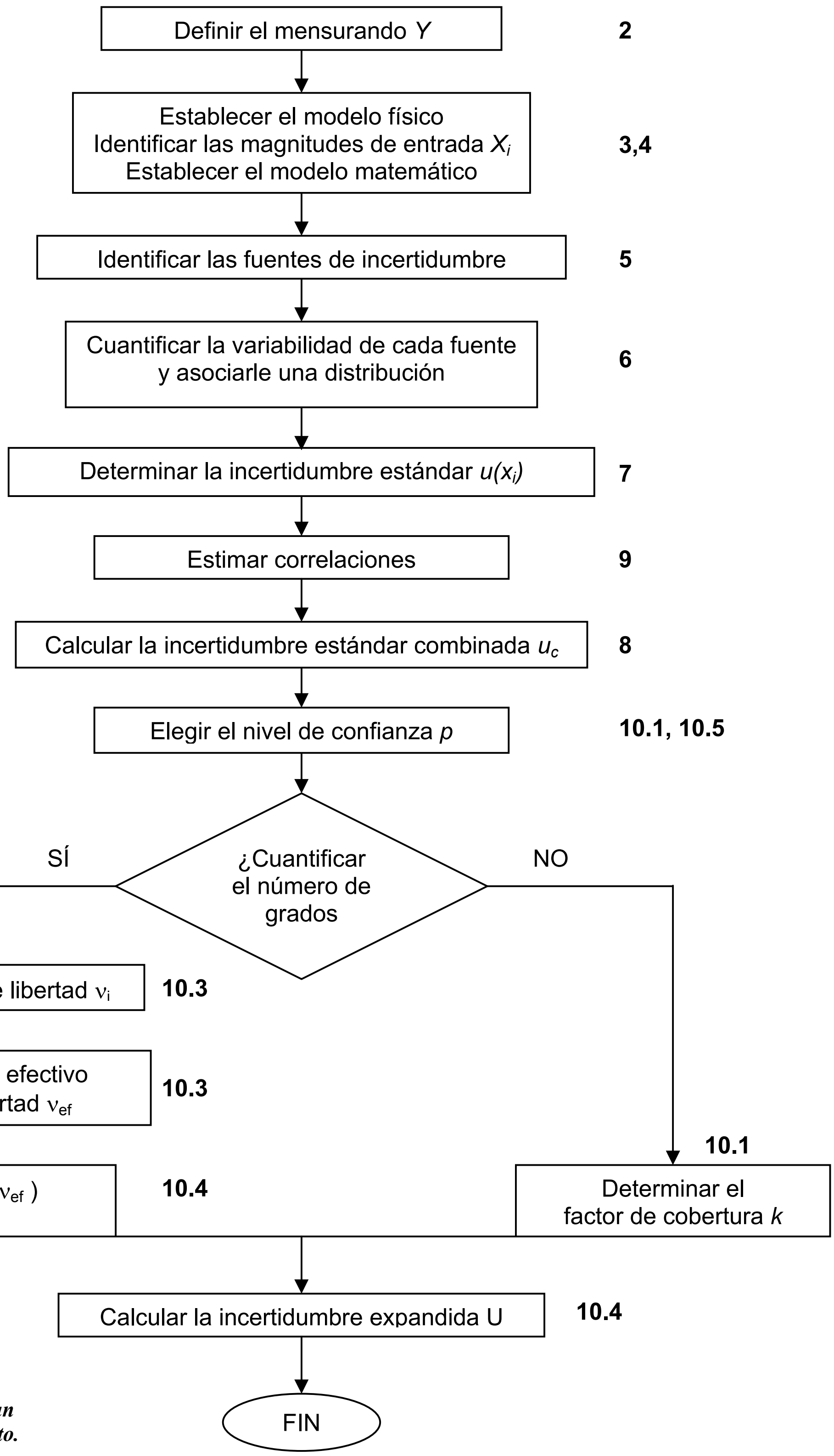
La expresión de la incertidumbre expandida *U* incluye su indicación como un intervalo centrado en el mejor estimado *y* del mensurando, la afirmación de que *p* es del 95% (o el valor elegido) aproximadamente y el número efectivo de grados de libertad, cuando sea requerido. Una manera de expresar el resultado de la medición es

$$Y = y \pm U \qquad (10.5)$$

El número de cifras significativas en la expresión de la incertidumbre es generalmente uno, o dos cuando la exactitud es alta (si la primera cifra significativa es uno o dos, cabe la posibilidad de usar un dígito más para evitar la pérdida de información útil). Además debe asegurarse que el número de cifras significativas del valor del mensurando sea consistente con el de la incertidumbre.

[5] Valores tomados de [1]

11. Diagrama para la estimación de incertidumbres de medición



Los numerales en cada bloque indican la sección relevante de este documento.

12. Referencias

[1] NMX-CH-140-IMNC-2002 Guía para la Expresión de la Incertidumbre de las Mediciones equivalente a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML (1995).

[2] International Vocabulary of Fundamental and General Terms in Metrology, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML (1993).

[3] d'Saverio, E. et al, XIV IMEKO World Congress, Tampere, Fin., Vol V, (Jun 1997)

[4] Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc Graw Hill Co. (1965)

[5] Hoel, P. G., Introduction to Mathematical Statistics , J. Wiley & Sons (1971).

[6] Eberhardt, Memorias de Workshop on Statistics in Intercomparisons, Londres, (1999).

[7] Castelazo, I, Comunicación personal.

[8] Política para la Declaración de Incertidumbres en el CENAM. No. 100-AC-P.013 (octubre de 1999).

[9] Schmid W. A., Lazos Martínez R. J. y Trujillo Juárez S. Incertidumbre en la calibración de viscosímetros capilares, CENAM, (julio de 2000).

Anexo A: Cálculo de la desviación estándar para una distribución rectangular

Como ejemplo se presenta el cálculo de la desviación estándar de una distribución rectangular. Para obtener la desviación estándar de otra distribución, hay que aplicar el mismo esquema de cálculo con esa distribución.

Según la ec. (6.2), la desviación estándar (experimental) de una serie de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se calcula por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}$$

El cuadrado de la desviación estándar s^2 es llamado varianza. Si el número de datos n es muy grande y si los datos están distribuidos de manera continua, la suma puede ser sustituida por una integral, y se obtiene la varianza como:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 \cdot p(x) dx$$

donde $p(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X_i y $\overline{x}$ es la media de los datos

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

Para una ***distribución rectangular*** cada valor de x dentro del intervalo $[a_-, a_+]$ tiene la misma probabilidad, o sea la de densidad de probabilidad $p(x)$ es constante:

$$p(x) = \begin{cases} 1/a & para \quad a_- \le x \le a_+ \\ 0 & para \quad x < a_- \quad y \quad x > a_+ \end{cases} \qquad \text{donde} \quad a = a_+ - a_-$$

La media $\overline{x}$ resulta:

$$\overline{x} = \int_{a_-}^{a_+} x \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_{a_-}^{a_+} = \frac{1}{2a} \cdot (a_+^2 - a_-^2) = \frac{1}{2a} \cdot (a_+ - a_-) \cdot (a_+ + a_-) = \frac{1}{2a} \cdot a \cdot (a_+ + a_-) =$$
$$= \frac{(a_+ + a_-)}{2}$$

La varianza s^2 se calcula:

$$s^2 = \int_{a_-}^{a_+} (x - \overline{x})^2 \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \cdot \left. \frac{(x - \overline{x})^3}{3} \right|_{a_-}^{a_+} = \frac{1}{3a} \cdot \left[(a_+ - \overline{x})^3 - (a_- - \overline{x})^3 \right] =$$
$$= \frac{1}{3a} \cdot \left[\left(\frac{a}{2} \right)^3 - \left(-\frac{a}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3a} \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{a^2}{12}$$

La desviación estándar finalmente resulta:

$$s = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}}$$

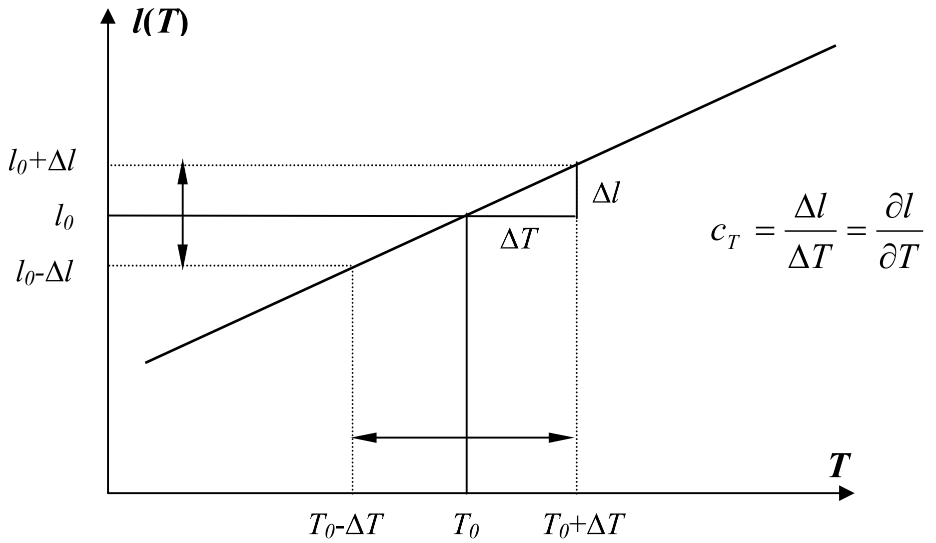
Anexo B: Coeficiente de sensibilidad

El coeficiente de sensibilidad relaciona el efecto que tiene la incertidumbre de una magnitud de entrada X_i en el mensurando Y. De esa manera determina que tan grande es la variabilidad del mensurando como resultado de la variabilidad (o incertidumbre) de esta magnitud de entrada.

Un ejemplo sencillo puede ayudar a ilustrar lo anterior: La dilatación o contracción de un bloque patrón debida a cambios de su temperatura se describe aproximadamente por:

$$l(T) \quad = \quad l_0 + \Delta l(T) \quad = \quad l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot (T - T_0)$$

donde $l(T)$ es la longitud del bloque patrón a la temperatura actual T, l_0 su longitud a la temperatura de referencia T_0 y α su coeficiente de dilatación térmica. Una variación de la temperatura T dentro de un intervalo $\pm\Delta T$ alrededor de T_0 causará variaciones de la longitud del bloque patrón dentro del intervalo $\pm\alpha{\cdot}l_0{\cdot}\Delta T$ alrededor de l_0 , como lo muestra la siguiente gráfica.



Como se puede ver, el intervalo de variabilidad de la temperatura se transfiere al intervalo de la variabilidad de la longitud mediante la pendiente de $l(T)$, quiere decir que Δl está dado por el producto de la pendiente de $l(T)$ con ΔT[6]:

$$\Delta l \quad = \quad \frac{\Delta l}{\Delta T} \cdot \Delta T \quad = \quad \frac{\partial l(T)}{\partial T} \cdot \Delta T \quad = \quad c_T \cdot \Delta T \qquad \text{donde} \qquad c_T = \alpha \cdot l_0$$

La pendiente de $l(T)$ se obtiene calculando la derivada (parcial) de $l(T)$ con respecto a T y es llamada coeficiente de sensibilidad c_T .

[6] En el caso de funciones no lineales en intervalos grandes puede ser necesario agregar otros términos.

Este concepto sigue siendo válido si el intervalo de variabilidad ΔT es sustituido por la incertidumbre estándar de la temperatura $u(T)$, y se obtiene para la contribución de la incertidumbre de la temperatura a la incertidumbre combinada:

$$u_T(l) \quad = \quad c_T \cdot u(T)$$

Generalmente el mensurando depende de varias magnitudes de entrada. En el ejemplo presentado, la longitud l del bloque patrón puede ser afectada por ejemplo por la fuerza F aplicada por los palpadores del instrumento de medición, o por la presión atmosférica p.

$$l \quad = \quad l(T, F, p, ...)$$

El coeficiente de sensibilidad c_i relacionado con una magnitud de entrada determinada X_i describe el impacto que tiene una variación de X_i en el mensurando Y, mientras todas las demás magnitudes de entrada se mantienen constantes. En un lenguaje matemático eso significa que se obtiene c_i determinando la derivada *parcial* de Y con respecto a X_i .

Regresando al ejemplo, puesto que la influencia de la presión atmosférica p es mínima, la longitud l del bloque patrón prácticamente no cambia debido a variaciones Δp de la presión atmosférica, por lo cual la pendiente $\partial l / \partial p$, y con esto el coeficiente de sensibilidad c_p son casi cero.

$$c_p \quad = \quad \frac{\partial l(T, F, p, ...)}{\partial p} \quad \cong \quad 0$$

Las variaciones de la presión atmosférica, aunque sean grandes, no causarán un efecto notable en la longitud del bloque patrón y su contribución a la incertidumbre combinada es prácticamente cero:

$$u_p(l) \quad = \quad c_p \cdot u(p) \quad \cong \quad 0 \cdot u(p) \quad = \quad 0$$

Anexo C: Ejemplo de formato para guiar la estimación de la incertidumbre

Nº	Magnitud de entrada X_i Fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Fuente de información	Incertidumbre original	Tipo, Distribución	Incertidumbre estandar $u(x_i)$	Coeficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad ν_i
1	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{x_1}$				$\boldsymbol{u(x_1)}$	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{u_1(y)}$	
1a	Fuente 1a		info	valor	info	$u_a(x_1)$		...	$\boldsymbol{\nu_{1a}}$
---	---		...	...	...	...		...	...
1m	Fuente 1m		info	valor	info	$u_m(x_1)$		...	$\boldsymbol{\nu_{1m}}$
2	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{x_2}$				$\boldsymbol{u(x_2)}$	$\boldsymbol{c_2}$	$\boldsymbol{u_2(y)}$	
2a	Fuente 2a		info	valor	info	$u_a(x_2)$		...	$\boldsymbol{\nu_{2a}}$
---	---		...	...	...	...		...	...
---	---		...	...	...	...		...	...
N	$\boldsymbol{X_N}$	$\boldsymbol{x_N}$				$\boldsymbol{u(x_N)}$	$\boldsymbol{c_N}$	$\boldsymbol{u_N(y)}$	
Na	Fuente Na		info	valor	info	$u_a(x_N)$		...	$\boldsymbol{\nu_3}$
---	---		...	...	...	...		...	...
	$\boldsymbol{Y}$	$\boldsymbol{y}$						$\boldsymbol{u_c(y)}$	$\boldsymbol{\nu_{ef}}$

U

Ejemplo: Calibración de un viscosímetro capilar con un material de referencia [9]:

Se mide la constante de aparato C del viscosímetro utilizando un líquido de referencia con la viscosidad ν_{MR} : $C = \frac{\nu_{MR} - \nu_{MR} \cdot U_R \cdot \Delta T}{t_R}$

Nº	Magnitud de entrada X_i Fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Fuente de información	Incertidumbre original	Tipo, Distribución	Incertidumbre estandar $u(x_i)$	Coeficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad ν
1	**Material de Referencia ν_{MR}**	175,482 mm^2/s	Certificado de calibración	0,63 mm^2/s	B normal, k=2	**0,315 mm^2/s**	**$2{,}37 \cdot 10^{-3}$ s^{-1}**	**$747 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2**	200
2	**Tiempo de flujo t_R**	421,55 s	**---**	**---**	**---**	**0,110 s**	**$9{,}87 \cdot 10^{-4}$ mm^2/s**	**$108 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2**	**---**
2a	Repetibilidad	---	Mediciones repetidas	0,045 s	A normal, k=1	0,045 s	---	$44 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	4
2b	Resolución cronómetro	---	Escala	0,01 s	B, rectangular	0,0029 s	---	$3 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	50
2c	Calibración cronómetro	---	Certificado de calibración	0,2 s	B normal, k=2	0,1 s	---	$99 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	200
3	**Temperatura ΔT**	0 K	**---**	**---**	**---**	**0,0307 K**	**$4{,}12 \cdot 10^{-3}$ $mm^2/K \cdot s^2$**	**$127 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2**	**---**
3a	Resolución termómetro	---	Escala	0,005 K	B, rectangular	0,0014 K	---	$6 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	50
3b	Calibración termómetro	---	Certificado de calibración	0,02 K	B normal, k=2	0,01 K	---	$41 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	∞
3c	Estabilidad temperatura	---	Pruebas	0,1 K	B, rectangular	0,029 K	---	$120 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2	29
	Constante del viscosimetro C	**$4162{,}8 \cdot 10^{-4}$ mm^2/s^2**	**---**	**---**	**---**	**---**	**---**	**$76 \cdot 10^{-6}$ mm^2/s^2**	**$230 \cong \infty$**