



CENTRO NACIONAL DE METROLOGÍA

INCERTIDUMBRE EN LA CALIBRACIÓN DE INDICADORES DE CUADRANTE

Carlos Colín Castellanos

Nota: *El presente ejercicio ha sido desarrollado bajo aspectos didácticos y lleva por esto algunas simplificaciones. Para aplicarlo a un caso específico, deben tomarse en cuenta los resultados particulares de esa medición o calibración, informes y certificados de calibración, características de los equipos, métodos, condiciones ambientales, habilidades del personal y todos los elementos relevantes particulares de ese sistema de medición.*

El Marqués, Qro., México, agosto de 2002.

ESTE DOCUMENTO SE HA ELABORADO CON RECURSOS DEL GOBIERNO MEXICANO.
SÓLO SE PERMITE SU REPRODUCCIÓN SIN FINES DE LUCRO Y HACIENDO REFERENCIA A LA
FUENTE:

C.Colín, en Ejercicios de Estimación de Incertidumbres en Mediciones Tomo II, CNM-INC-PT-002 Tomo II.
Centro Nacional de Metrología. <[http:// www.cenam.mx](http://www.cenam.mx)> México, agosto 2002.

INCERTIDUMBRE EN LA CALIBRACION DE INDICADORES DE CUADRANTE.

Carlos Colín Castellanos
Agosto, 2002

Resumen. Se presenta la estimación de incertidumbre para un indicador de cuadrante digital con alcance de medición de 0 – 12,5 mm y división mínima de la escala de 0,01 mm. La estimación esta basada en el método de la Guía para la Expresión de Incertidumbres en la Medición (BIMP, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML).

1. Introducción

El indicador de cuadrante es un instrumento que puede emplearse como comparador o como instrumento de medición directa. Para el caso de indicadores analógicos, el husillo transmite el movimiento lineal a un mecanismo transformándolo en movimiento circular de una aguja indicadora, que gira alrededor de una escala dividida en intervalos iguales. También hay de tipo digital los cuales, por medios eléctricos, muestran el resultado de la medición en una pantalla.

En la calibración de estos instrumentos se pueden emplear bloques patrón (bp) o un calibrador de indicadores de cuadrante, para el ejemplo presentado se utilizaron bloques patrón. Los bp son paralelepípedos de sección rectangular, hechos de material resistente al desgaste, con un par de superficies de medición planas y paralelas entre sí.

2. Definición del mensurando

El mensurando es el error del indicador de cuadrante definido como la diferencia entre la lectura del instrumento y la longitud del bp a la temperatura de calibración, más la deformación que sufre el contacto plano-esfera debida a la fuerza de medición.

El modelo matemático correspondiente es

$$e = li - l[1 + \alpha q] + d \quad (1)$$

donde:

li	indicación del instrumento
l	longitud del bloque a la temperatura de referencia (longitud nominal)
α	coeficiente de expansión térmica lineal del bloque patrón
$q = t - t_{ref}$	diferencia de temperatura entre la temperatura t del bp y la temperatura de referencia t_{ref}
d	deformación

Para facilitar la explicación del modelo se hará uso de un ejemplo: El instrumento utilizado para es un indicador de cuadrante digital con división mínima de la escala de 0,01 mm y alcance de medición de 0 – 12,5 mm. El control de temperatura del laboratorio donde se efectuó la calibración es de 20 ± 1 °C. Un diagrama de la calibración se muestra en la figura 1.

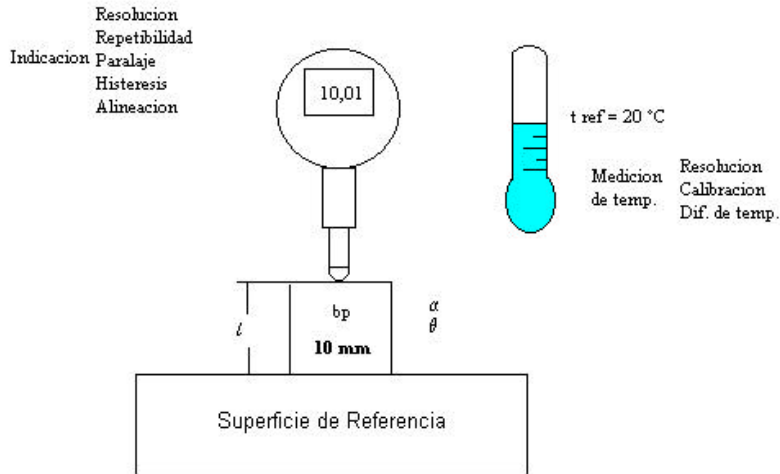


Figura 1. Diagrama de calibración de un indicador de cuadrante.

Se hacen las siguientes suposiciones:

- Se usan bp con grado de exactitud “K” lo cual supone que son de mejor exactitud con respecto al indicador de cuadrante; el valor convencionalmente verdadero será su longitud nominal y las desviaciones geométricas (planitud y paralelismo) se asumen despreciables.
- Las condiciones ambientales del laboratorio corresponden a un laboratorio tipo II [1] con $20\text{ °C} \pm 1\text{ °C}$.
- El diámetro de la punta del indicador de cuadrante (fabricada en carburo de tungsteno) puede considerarse constante, con incertidumbre despreciable.

Como se muestra en el modelo matemática, ec (1), si la diferencia de temperatura entre la temperatura del bp y la temperatura de referencia se designa como:

$$\mathbf{q} = t - t_{ref} \quad (2)$$

entonces, la longitud del bp a una temperatura t esta dada por:

$$l_q = l(1 + \mathbf{aq}) \quad (3)$$

l – longitud del bloque a la temperatura de referencia (longitud nominal)

\mathbf{a} - coeficiente de expansión térmica lineal del bloque patrón

Además, la expresión que determina la deformación del bloque de acero que se produce por el contacto esfera-plano [1] es:

$$\mathbf{d} = 0,00044 * P^{2/3} \left(\frac{l}{D} \right)^{1/3} \quad (4)$$

donde:

P – es la fuerza total aplicada en N

D – diámetro de la esfera en mm

Finalmente el modelo matemático resulta:

$$e = li - l(1 + \mathbf{aq}) + 0,00044 * P^{2/3} \left(\frac{1}{D} \right)^{1/3} \quad (5)$$

3. Incertidumbre estándar e incertidumbre expandida.

La incertidumbre estándar es la suma cuadrática de las incertidumbres de los factores de influencia $u(x_i)$ cada uno ponderado por su coeficiente de sensibilidad c_i , en general tenemos:

$$u^2_c(e) = \sum_{i=1}^N c_i^2 * u^2(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} c_{ij}^2 + c_i * c_{ij} \right] * u^2(x_i) * u^2(x_j) \quad (6)$$

$u(x_i)$ son las incertidumbres estándar atribuidas a las variables de influencia, evaluadas como Tipo A o Tipo B y donde:

$$c_i = \frac{\partial e}{\partial x_i}, \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial x_j}, \quad c_{ijj} = \frac{\partial^3 e}{\partial x_i \partial^2 x_j} \quad (7)$$

Por simplificación se recomienda analizar la ecuación (6) en dos partes; los términos de primer orden, que son aquellos que contienen $u^2(x_i)$, y los términos cruzados o de segundo orden aquellos que contienen $u^2(x_i) * u^2(x_j)$.

4. Coeficientes de sensibilidad.

El modelo que describe la medición esta representado en la ecuación (5) y simplemente sustituyendo las variables de influencia en lugar de x_i en la ecuación (6), la incertidumbre estándar combinada se escribe:

$$u^2_c(e) = c_{li}^2 * u^2(li) + c_l^2 * u^2(l) + c_a^2 * u^2(\mathbf{a}) + c_q^2 * u^2(\mathbf{q}) + c_p^2 * u^2(P) + \text{terminos cruzados} \quad (9)$$

Los coeficientes de sensibilidad se muestran en las tablas 1, 2 y 3.

x_i	$c_i = \partial e / \partial x_i$
li	l
l	$-(1 + \mathbf{aq})$
\mathbf{a}	$-l \mathbf{q}$
\mathbf{q}	$-l \mathbf{a}$
P	$0,000\ 293 * P^{-1/3} (1/D)^{1/3}$

Tabla 1. Coeficientes de sensibilidad de primer orden

x_i	$C_{ij} = \frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial x_j}$				
	$x_j = li$	L	\mathbf{a}	\mathbf{q}	P
Li
L	.	.	$-\mathbf{q}$	$-\mathbf{a}$.
\mathbf{a}	.	$-\mathbf{q}$.	$-l$.
\mathbf{q}	.	$-\mathbf{a}$	$-l$.	.
P	$-0,000\ 098 * P^{-4/3} (1/D)^{1/3}$

Tabla 2. Coeficientes de sensibilidad de orden superior.

x_i	$C_{ijj} = \frac{\partial^3 e}{\partial x_i \partial x_j^2}$				
	$x_j = li$	L	\mathbf{a}	\mathbf{q}	P
Li
L
\mathbf{a}
\mathbf{q}
P	$0,000\ 13 P^{-7/3} (1/D)^{1/3}$

Tabla 3. Coeficientes de sensibilidad de orden superior.

Sustituyendo los coeficientes de sensibilidad de las tablas 1, 2 y 3 en la ecuación (9), ésta resulta:

$$\begin{aligned}
 u^2_c = & u^2(li) + [1 + \mathbf{a}\mathbf{q}]^2 u^2(l) + [l\mathbf{q}]^2 u^2(\mathbf{a}) + [l\mathbf{a}]^2 u^2(\mathbf{q}) + [0,000293 * P^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{3}}] u^2(P) + \\
 & \left[\mathbf{q}^2 u^2(l) u^2(\mathbf{a}) + \mathbf{a}^2 u^2(l) u^2(\mathbf{q}) + l^2 u^2(\mathbf{a}) u^2(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \left(0,000098 * P^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{3}} + 0,00013 * P^{-\frac{8}{3}} \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \right)^2 \right] * u^4(P)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

5. Estimación de las incertidumbres estándar de las variables de influencia.

5.1 Incertidumbre estándar de la lectura del indicador de cuadrante (li)

Esta incertidumbre involucra el resultado de cinco contribuciones: resolución repetibilidad, paralaje, histéresis y alineación.

5.1.1 Resolución (u_r)

La incertidumbre estándar por resolución para un instrumento analógico, si consideramos una distribución rectangular, podemos estimarla como:

$$u_r = \frac{\left(\frac{DME}{z}\right)}{\sqrt{3}} \quad (11)$$

o para un instrumento digital:

$$u_r = \frac{DME}{\sqrt{12}} \quad (12)$$

donde:

DME – división de la escala

z – número de partes que el observador puede percibir dentro de una DME en un instrumento analógico

5.1.2 Repetibilidad (u_R)

Se estima como la desviación estándar de la media de una serie de mediciones repetidas:

$$u_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (13)$$

donde:

x_i – lectura i

\bar{x} - valor promedio de las i lecturas

n – numero de lecturas

5.1.3 Paralaje (u_p)

Este componente de incertidumbre solo está presente en los instrumentos analógicos y se debe a que el punto de observación y la aguja indicadora no están en la misma perpendicular al plano de la carátula. Para este ejemplo no existe esta componente ya que el indicador es digital, sin embargo, la expresión para estimarla es la siguiente (se considera medio intervalo porque el error puede ser hacia ambos lados respecto a la línea perpendicular ideal):

$$u_p = \frac{DO * h * DME}{DF * d * \sqrt{3}} \quad (14)$$

donde:

DO – desviación respecto de la posición ideal

h – separación entre la escala y la aguja indicadora

DF – distancia de lectura de la escala (metrólogo – instrumento)

d – distancia física entre dos marcas consecutivas de la escala

5.1.4 Histéresis (u_h)

Se debe a la diferencia de energía acumulada en los mecanismos del indicador cuando asciende y cuando desciende. Se determina durante la calibración como la máxima diferencia de lecturas encontrada (en un mismo punto) entre los recorridos de ascenso y descenso. Si suponemos una distribución rectangular la incertidumbre por histéresis queda determinada por:

$$u_h = \frac{|x_{ia} - x_{id}|_{max}}{2\sqrt{3}} \quad (15)$$

donde:

x_{ia} – lectura del punto i en ascenso

x_{id} – lectura del punto i en descenso

5.1.5 Alineación (u_a)

Esta fuente de incertidumbre esta asociada con la falta de perpendicularidad entre el instrumento y la superficie de referencia (conocido como error de coseno). Si suponemos una distribución rectangular:

$$u_a = \frac{l(1 - \cos f)}{\sqrt{3}} \quad (16)$$

donde:

f - ángulo con respecto a la vertical

Finalmente, con la combinación cuadrática de las incertidumbres estándar de 5.1.1. hasta 5.1.5 obtenemos la incertidumbre de la lectura del indicador de cuadrante $u(li)$.

$$u^2(li) = u^2_r + u^2_R + u^2_p + u^2_h + u^2_a \quad (17)$$

5.2 Incertidumbre estándar de los bloques patrón

Esta incertidumbre se obtiene del certificado de calibración de los bp.

$$u(l) = \frac{U}{k} \quad (18)$$

donde:

U – incertidumbre expandida indicada en el certificado de calibración

k – factor de cobertura

5.3 Incertidumbre estándar del coeficiente de expansión térmica lineal

El material de los bp es acero y de [2] sabemos que $\mathbf{a} = 11,5 \times 10^{-6} \pm 1 \times 10^{-6} 1/^{\circ}\text{C}$. Considerando una distribución rectangular, la incertidumbre estándar es:

$$u(\mathbf{a}) = \frac{1 \times 10^{-6}}{\sqrt{3}} \quad (19)$$

5.4 Incertidumbre por diferencia de temperatura de los bp con respecto a la temperatura de referencia.

Las condiciones del laboratorio de calibración están definidas con una temperatura de referencia de $20 \pm 1 ^{\circ}\text{C}$, sin embargo la variación de temperatura durante la calibración se midió como $\theta = \pm 0,5 ^{\circ}\text{C}$ y la incertidumbre en la determinación de la temperatura tiene los siguientes componentes: resolución del termómetro, incertidumbre del termómetro y variación de temperatura ambiente.

5.4.1 Resolución (u_{RT})

Se utilizó un termómetro digital con división de la escala de $0,01 ^{\circ}\text{C}$.

$$u_{RT} = \frac{DME}{2\sqrt{3}} \quad (20)$$

5.4.2 Calibración del termómetro (u_{ct})

Del certificado de calibración obtenemos la incertidumbre del termómetro, afectándolo por el factor de cobertura correspondiente.

$$u_{ct} = \frac{U}{k} \quad (21)$$

5.4.3 Variación de temperatura del medio ambiente.

La variación cíclica de la temperatura (distribución senoidal) se determinó experimentalmente de las gráficas obtenidas del higrotermógrafo, obteniéndose valores que oscilan entre $\pm 0,5 ^{\circ}\text{C}$.

$$u_{vt} = \frac{q}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

entonces, $u(\mathbf{q})$ se estima con las contribuciones calculadas con 5.4.1 hasta 5.4.3:

$$u^2(\mathbf{q}) = u^2_{RT} + u^2_{ct} + u^2_{vt} \quad (23)$$

5.5 Incertidumbre estándar de la fuerza de medición

Se compone de tres contribuciones, resolución de la balanza, incertidumbre de calibración de la misma y la variación de la fuerza de medición dentro del intervalo de medición.

5.5.1 Resolución de la balanza (u_{RB})

La balanza utilizada es digital y suponiendo una distribución rectangular tenemos que:

$$u_{RB} = \frac{DME}{2\sqrt{3}} \quad (24)$$

5.5.2 Calibración de la balanza (u_B)

Del certificado de calibración tomamos la información dividiéndola por el factor de cobertura correspondiente:

$$u_B = \frac{U}{k} \quad (25)$$

5.5.3 Variación de la fuerza de medición (u_{vf})

La variación permitida de la fuerza de medición, en todo el intervalo, se encuentra indicado en la norma JIS B 7503, con un valor de 0,7 N (72 gf), entonces:

$$u_{vf} = \frac{VF}{2\sqrt{3}} \quad (26)$$

donde:

VF – Variación de la fuerza de medición.

Por lo tanto, la incertidumbre estándar debida a la fuerza de medición se estima como:

$$u_p^2 = u_{RB}^2 + u_B^2 + u_{vf}^2 \quad (27)$$

6 Combinación de las incertidumbres e incertidumbre expandida.

Sustituyendo las incertidumbres estándar en la ecuación (10) se obtiene el valor de la incertidumbre estándar combinada. En el anexo A se muestra el presupuesto de todas las incertidumbres, en el cual se observa un valor de $u_c = 0,0037$ mm

Este resultado multiplicado por el factor de cobertura nos proporciona el resultado final de la incertidumbre expandida $U = 0,0075$, cuando se considera un factor de cobertura de $k = 2,05$ correspondiente a un número efectivo de 55 grados de libertad para un nivel de confianza de 95 %.

7 **Discusión.**

Con base a los resultados en este ejemplo (ver anexo A), la contribución debida a la lectura del indicador de cuadrante representa el 99,9 % del valor estimado, de este valor el 61,5 % es la resolución, el 35,7 % la alineación y el 2,5 % la histéresis. Se concluye que la evaluación de estas tres fuentes de incertidumbre es una buena aproximación para estimar la incertidumbre en la calibración o medición con este tipo de instrumentos. Esta suposición deberá ser tomada con precaución ya que aplica para aquellos casos en que las condiciones de medición y el método de calibración sean muy similares a los propuestos en este documento, si éstos cambian deberá de realizarse una nueva evaluación ya que longitudes y variaciones mayores a las utilizadas pueden incrementar en forma significativa su porcentaje de participación en el balance final.

Por lo que respecta a los términos de segundo orden podemos observar que en este ejemplo su participación es insignificante y por lo tanto, podemos despreciarlos del análisis, sin embargo, para el caso de la calibración de bloques patrón por el método de comparación mecánica estos contribuyen de manera significativa y no deben desecharse del análisis.

8. **Referencias.**

- [1] Recomendaciones de condiciones ambientales para los laboratorios de metrología (SNC-D5).
- [2] Bloques Patrón Longitudinales. Asociación Española para Control de Calidad, Comité de Metrología (1986).
- [3] JIS B 7503 (1992) Dial Gauges.
- [4] Jennifer E. Decker y James R. Pekelsky, Uncertainty of Gauge Block Calibration by Mechanical Comparison: A Worked Example, 16 may 1996.
- [5] González Muñoz, Héctor, Incertidumbre en la Calibración de Calibradores tipo Vernier, Centro Nacional de Metrología (junio 2001).

Autor: Carlos Colín Castellanos,
División de Metrología Dimensional, Área de Metrología Mecánica, CENAM.
ccolin@cenam.mx,
Tel. 52 (442) 2 11 05 00 ext. 3287; Fax 52 (442) 2 15 39 04

Anexo A: Tabla de presupuesto de incertidumbre

Nº	Magnitud de entrada Fuente de incertidumbre	Valor estimado	Fuente de información	Incertidumbre original	Tipo de distribución	Incertidumbre estándar	Coficiente de sensibilidad	Contribución $u(y)$	Porcentaje de participación %	Grados de libertad
		x_i				$u(x_i)$				
1	Lectura del indicador (<i>li</i>)	25 mm	---	mm	---	0,00368	1	0,00368	99,9	55
1a	Resolución	---	escala	0,01	B rectangular	0,00289				
1b	Repetibilidad	---	mediciones	0,0001491	A normal, k = 1	0,0001700				
1c	Paralaje	---	JIS B 7507	---	B rectangular	0				
1d	Histéresis	---	mediciones	0,002	B rectangular	0,0005770				
1e	Alineación	---	cálculo	0,0038076	B rectangular	0,002198				
2	Bloques patrón (<i>l</i>)	25	certificado	3,841E-05	B rectangular	1,920E-05	1,0000058	0,00002	0,0	50
				1/°C						
3	Coficiente de expansión térmica de los bloques patrón	1,15E-05	catálogo	1,15E-06	B rectangular	6,6395E-07	12,5	8,299E-06	0,0	50
4	Diferencia de temp. entre bp y ambiente	20	---	°C	---	0,3536	2,88E-04	0,00010	0,1	12
4a	Resolución	---	escala	0,01	B rectangular	0,00289				
4b	Termómetro	---	certificado	0,5	B rectangular	0,0025				
4c	Variación de temperatura	---	ambiente	0,5	B Tipo "U"	0,3536				
5	Fuerza de medición			N	---	0,2039	3,1337E-05	0,00001	0,0	12
5a	Resolución	---	escala	0,01	B rectangular	0,0028				
5b	Balanza	---	certificado	0,005	B normal	0,0014				
5c	Variación de la fuerza de medición	---	JIS B 7503	0,71	B rectangular	0,2038				
	Terminos de segundo orden	---	---	---		$u(x_i)*u(x_j)$				
6	longitud y coeficiente de expansión térmica	---	---	---	B rectangular	1,275E-11	0,5	6,375E-12	0,0	12
7	longitud y diferencia de temperatura	---	---	---	B rectangular	6,790E-06	1,15E-05	7,808E-11	0,0	12
8	coef. de exp. térmica y dif. de temperatura	---	---	---	B rectangular	2,348E-07	25	5,869E-06	0,0	12
9	fuerza de medición	---	---	---	B rectangular	432,1	4,134E-09	1,787E-06	0,0	12
	Error de lectura <i>e</i>	0,02 mm	---	---	---	---	---	0,0037		55
	INCERTIDUMBRE EXPANDIDA (k = 2)							0,0074mm		
	INCERTIDUMBRE EXPANDIDA (con grados de libertad efectivos)				2,05			0,0075mm		