

Comparación de los métodos utilizados para la
diseminación de los patrones de masa de alta
exactitud y validación de la incertidumbre estimada
mediante simulación numérica

Lautaro Ramírez Varas

Luis Omar Becerra Santiago

Luis Manuel Peña Pérez

Objetivo del proyecto

Diseminar las masas con trazabilidad al k-21.

Determinar el mejor estimado de los diferentes métodos.

Corroborar el cálculo de la generalización de la GUM para el caso multivariable con Monte Carlo.

Comparar los distintos métodos de subdivisión entre ellos.

Diseminación de la unidad de masa

La unidad de masa es el kilogramo

Este debe ser subdividido y multiplicado.

Debe conocerse los valores de corrección de las pesas.

Debe conocerse su incertidumbre asociada y su correlación

Diseminación del kilogramo

En la calibración de pesas E_1 , de valor nominal igual o menor que 500 mg, se recomienda los esquemas de subdivisión según la OIML R-111, para alcanzar las incertidumbres apropiadas.

¿Cómo se disemina?

**En la fila 3 se
compara la
pesa de 500
con la de 200
200* y 100**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1000g \\ 500g \\ 200g \\ 200g^* \\ 100g \\ 100g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ m_R \end{pmatrix}$$

Métodos de Subdivisión del kilogramo

Mínimos Cuadrados Ordinarios

Mínimos Cuadrados Ponderados-
Multiplicadores de Lagrange

Gauss Markov(Mínimos Cuadrados
ponderados)

Diseño Ortogonal

¿ Qué se hizo ?

Modelo de medición

Se compararon los resultados obtenidos por los diferentes métodos para un único conjunto de datos

Para todos los métodos anteriores se consideró el siguiente modelo de medición

$$y = \Delta m - \rho_a (V_r - V_q) - \varepsilon_{ajuste}$$

Metodología

La comparación de métodos de subdivisión se realizó bajo las mismas condiciones con el fin de evaluar únicamente el resultado del ajuste con los diferentes métodos.

- Datos
- Condiciones ambientales

Se consideraron tres ciclos de comparación ABBA para cada fila, que corregidos por efecto boyante y sensibilidad de la balanza, permiten obtener un vector de diferencias, Y

Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) 1er Método

Función a minimizar $S^2 = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y})$

Vector de proyección ortogonal $P = (X^T X)^{-1} X^T$

Vector de estimados de masa $\hat{\beta}_{MCO} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

Matriz de varianza covarianza $\text{cov}(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} \sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{e^T e}{m - n}$$

MCO

Esquema de solución

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1000 \text{ g} \\ 500 \text{ g} \\ 200 \text{ g} \\ 200 \text{ g} * \\ 100 \text{ g} \\ 100 \text{ g} * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ m_R \end{pmatrix}$$

Método Ortogonal 2do Método

Se resuelven mediante los
Mínimos Cuadrados Ordinarios
La matriz de diseño X tiene
columnas mutuamente
ortogonales entre sí.

Método Ortogonal

Se arregla matriz de diseño X para obtener valores no correlacionados en la matriz varianza-covarianza (columnas mutuamente ortogonales)

Para lograr la matriz de diseño X del modelo ortogonal, algunas de las comparaciones, (renglones de X y sus correspondientes elementos del vector Y), son repetidos o eliminados

Método Ortogonal

El patrón está en el vector de observaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 500 \text{ g} \\ 200 \text{ g} \\ 200 \text{ g} * \\ 100 \text{ g} \\ 100 \text{ g} * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + m_r \\ y_2 + m_r \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}$$

Mínimos Cuadrados Ponderados, solución Multiplicadores de Lagrange (MCP-ML) 3er Método

Función a minimizar

$$\chi^2 = (y - \hat{y})^T W^{-2} (y - \hat{y})$$

Para quitar la singularidad

$$\chi^2 = (y - \hat{y})^T W^{-2} (y - \hat{y}) + 2\lambda^T f(\beta, \hat{y})$$

MCP-ML

Estimados de masa

$$\hat{\beta}_{MCP} = (X''^T X'')^{-1} X''^T Y''$$

Con

$$X'' = W^{\frac{1}{2}} X$$
$$Y'' = W^{\frac{1}{2}} Y$$

Vector de proyección Ortogonal

$$P = (X''^T X'')^{-1} X''^T$$

Matriz de varianza covarianza

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{MCP}) = (X''^T X'')^{-1} X''^T W^{-1} (X''^T X'')^{-1} X''^T$$

MCP-LM

El valor del patrón se ingresa en las ecuaciones normales y no en la matriz de diseño

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1000g \\ 500g \\ 200g \\ 200g^* \\ 100g \\ 100g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix}$$

Gauss Markov (GM) 4to Método

Para el método de Gauss Markov (GM), se asume una función de varias variables aleatorias, a diferencia de los demás métodos donde se asume que Y es únicamente función de las variabilidad de las indicaciones de la balanza

GM

Estimados

$$\hat{\beta} = (X^T W^{-1} X)^{-1} X^T W^{-1} Y$$

Matriz de varianza-covarianza

$$\text{cov}(\beta) = (X^T W^{-1} X)^{-1}$$

Generalización de la GUM para el caso Matricial

Matriz completa $W = J_u \phi J_u^T$

El Jacobiano del vector de observaciones,

$$J_u = \begin{bmatrix} J_{\Delta L} & J_{\rho} & J_V & J_{ajuste} \end{bmatrix}$$

GM

Para este modelo de medición $Y = [\Delta L \quad \rho_a \quad V \quad \varepsilon_{ajuste}]$

Y Φ será la matriz compuesta de matices de varianza

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{\Delta L} & \phi_{\Delta L, \rho_a} & \phi_{\Delta L, V} & \phi_{\Delta L, ajuste} \\ \phi_{\Delta L, \rho_a} & \phi_{\rho_a} & \phi_{\rho_a, V} & \phi_{\rho_a, ajuste} \\ \phi_{\Delta L, V} & \phi_{\rho_a, V} & \phi_V & \phi_{V, ajuste} \\ \phi_{\Delta L, ajuste} & \phi_{\rho_a, ajuste} & \phi_{V, ajuste} & \phi_{ajuste} \end{pmatrix}$$

GM

IDEM MCO

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1000 \text{ g} \\ 500 \text{ g} \\ 200 \text{ g} \\ 200 \text{ g} * \\ 100 \text{ g} \\ 100 \text{ g} * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ m_R \end{pmatrix}$$

Comparación

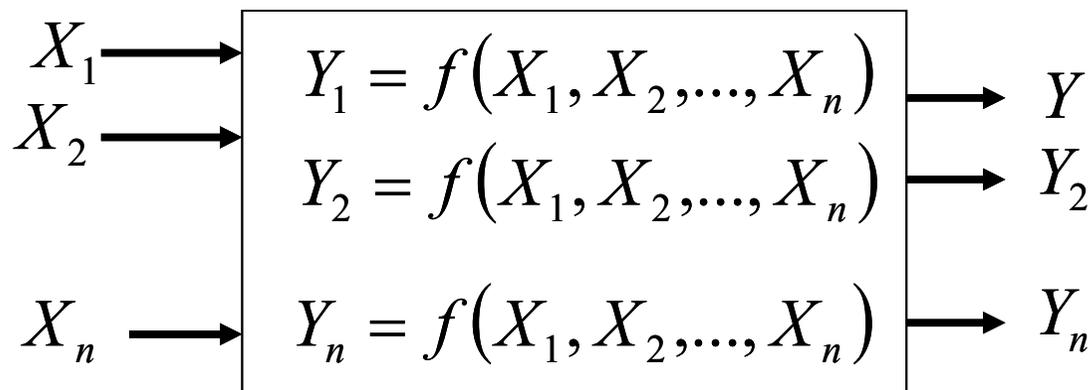
Se comparó cada método con la simulación numérica mediante Monte Carlo.

Cada método se comparó con los demás

Simulación Numérica por Monte Carlo (SNMC)

- Combina distribuciones de probabilidad de las variables de entrada de acuerdo al modelo de medición y arroja valores para la variable de salida
- Igual que en el caso de la aplicación del método GUM, la Simulación Numérica por el Método de Monte Carlo descrita en el suplemento 1 de la GUM no considera el caso multivariable de salida
- Para la estimación de la incertidumbre de los estimados de salida (estimados de masa de las pesas) se hace la generalización para el cálculo matricial
- **A nivel multivariable no se había desarrollado la simulación, salvo en pesas de igual valor nominal(CENAM).**

SNMC



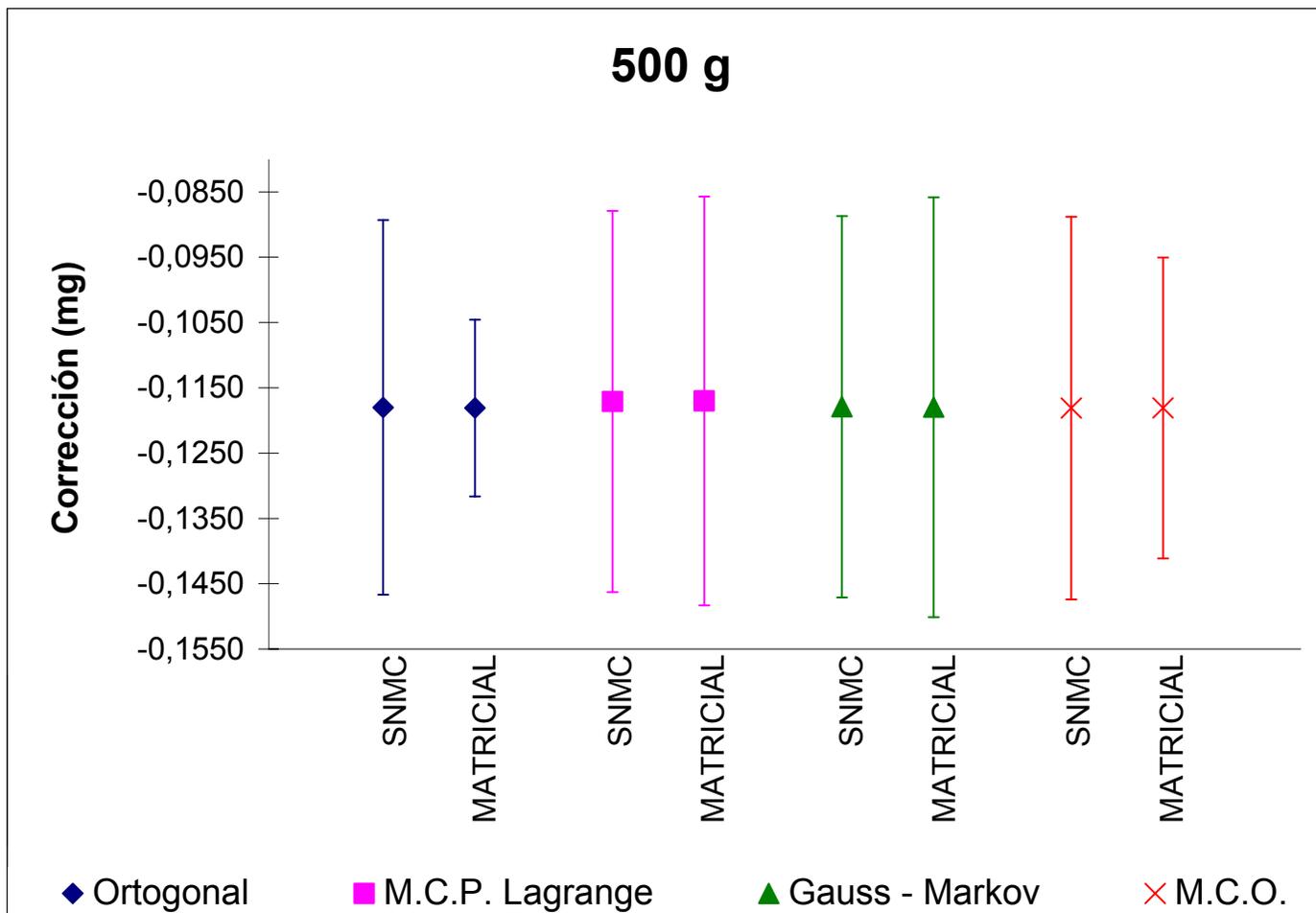
SNMC

Variables de entrada
Diferencias en masa
Densidades del aire
Volúmenes de las pesas
Valor del patrón

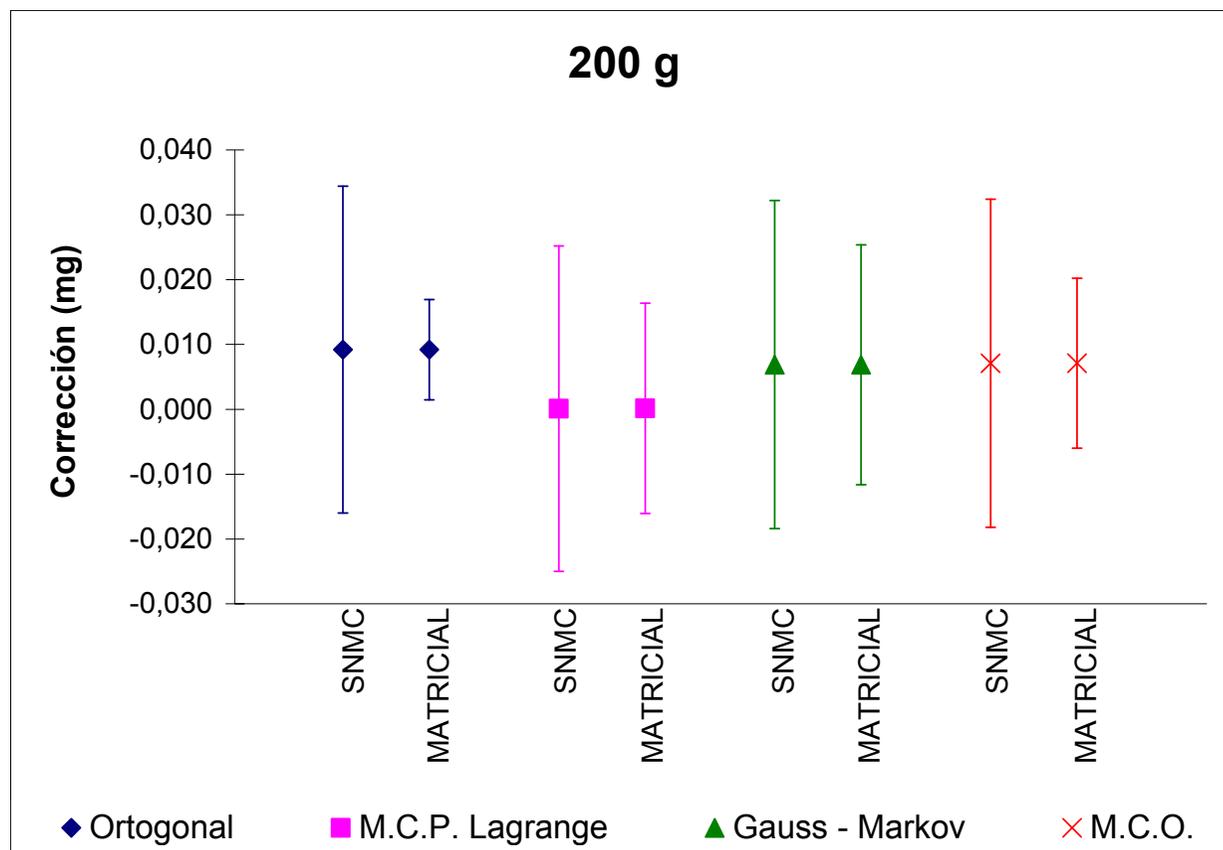
Variables salida

- Vector de las pesas a calibrar

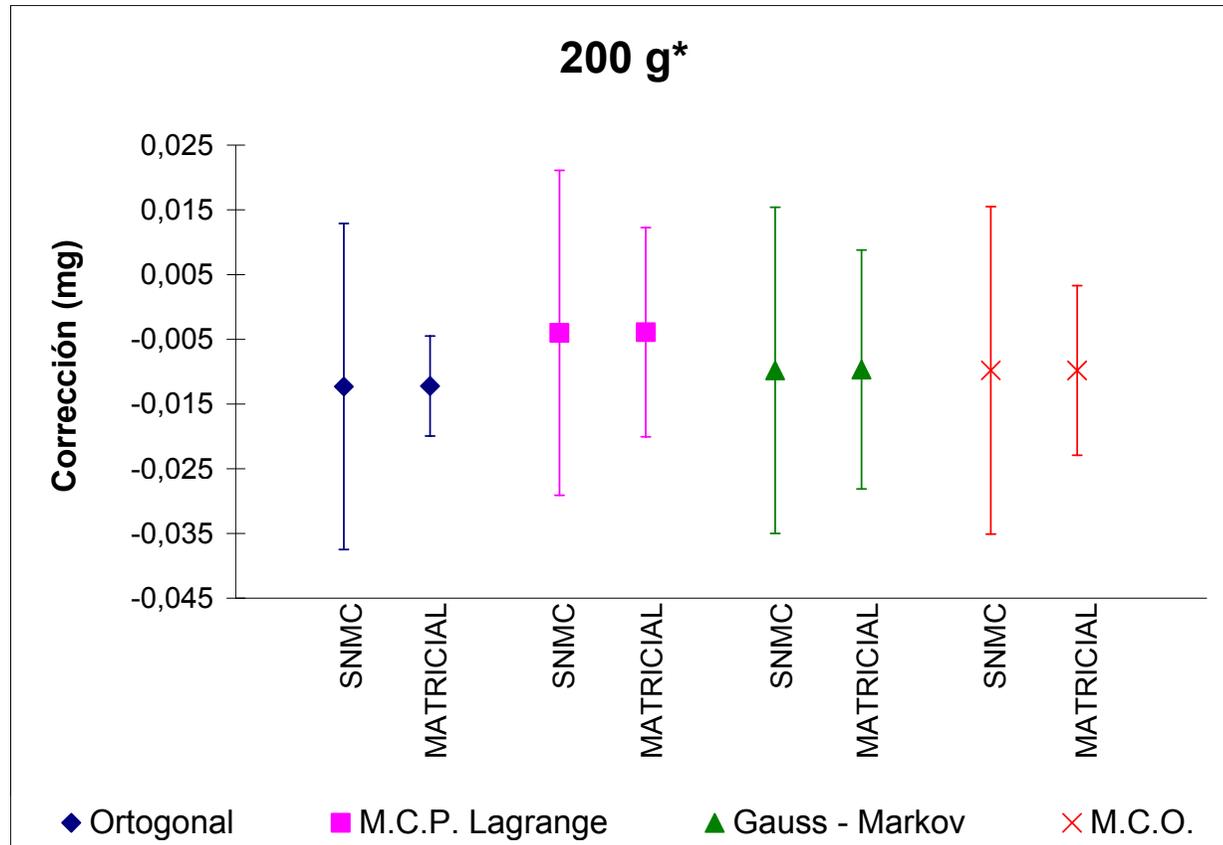
Resultados k=1



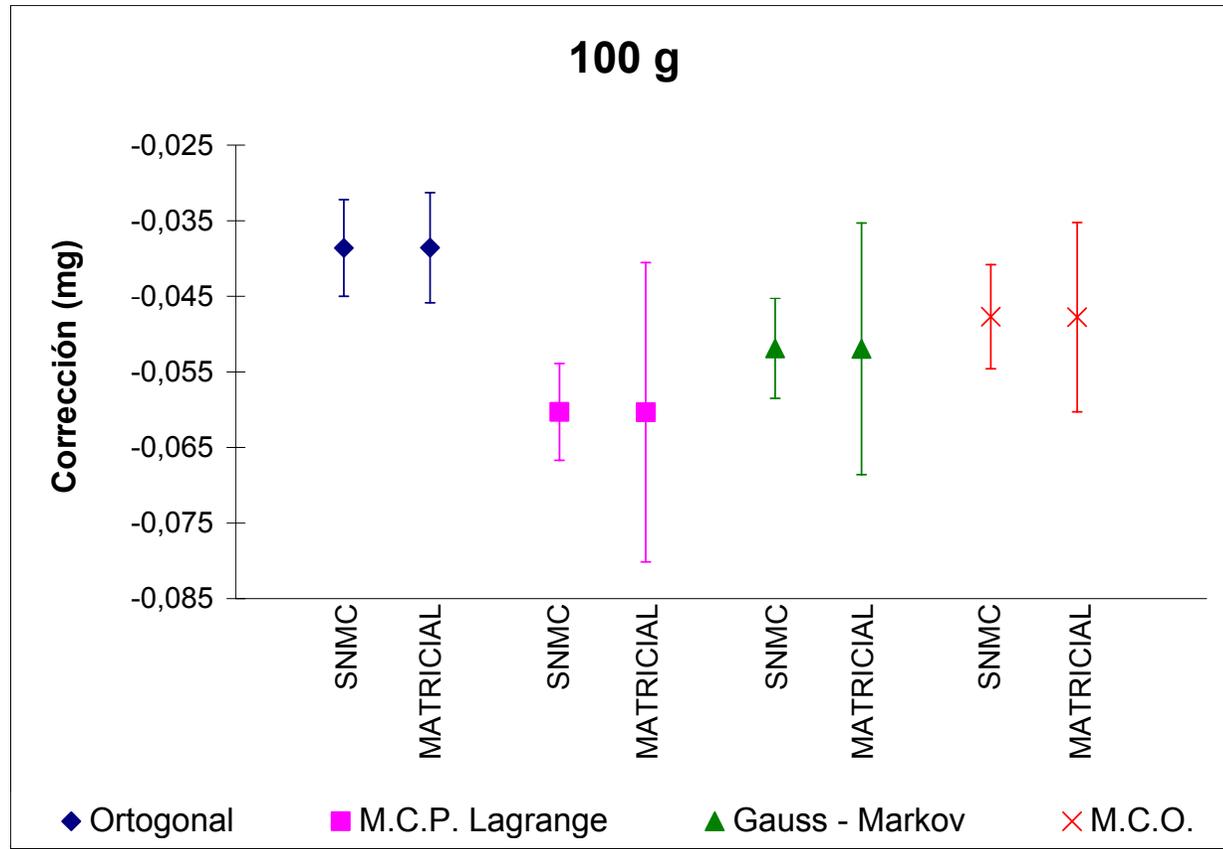
Resultados k=1



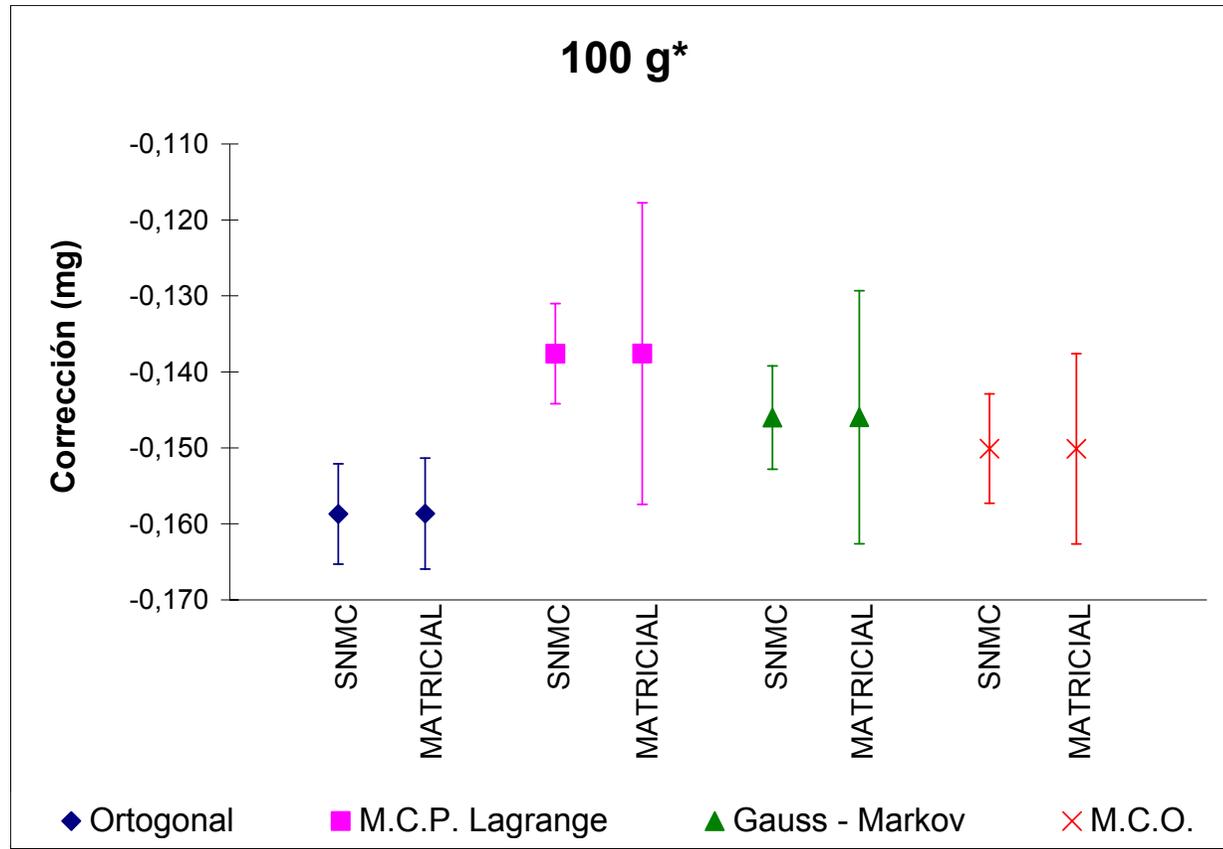
Resultados k=1



Resultados k=1



Resultados k=1



Conclusiones

- Los estimados o correcciones de las SNMC no varían significativamente de aquellos provenientes de los métodos matriciales.
- En algunos caso la incertidumbre estimada de las SNMC difiere significativamente de la incertidumbre estimada mediante la generalización de la GUM.
- La pesa de 100 g es comúnmente utilizada como referencia para la década subsecuente, por tal motivo es de suma importancia tener estimados confiables y con la incertidumbre apropiada.
- La SNMC permite calcular la correlación entre los estimados de masa para el modelo Ortogonal .

Conclusiones

- Los estimados de las correcciones, del vector β son iguales con respecto a su simulación, y en general entre métodos, no existen diferencias significativas.
- Donde no se cumple el principio de igualdad de varianzas, los resultados de los métodos que ponderan tenderán a diferenciarse de los métodos que no ponderan.

Conclusiones

- Los coeficientes de correlación resultantes de la simulación numérica para el método ortogonal, son los más bajos.
- Los resultados de GM tenderán a parecerse a los resultados de MCP-ML conforme las varianzas de las contribuciones tipo B sean menores en relación a la varianzas de la contribución tipo A.
- Como resultado de este trabajo se recomienda emplear el modelo matemático de GM y aplicar la simulación numérica por el método de Monte Carlo