

Aplicación de Modelos Teóricos Sencillos para Conocer el Comportamiento Térmico de Celdas para Medición de Propiedades Térmicas de Distintos Diseños Geométricos

L. Lira-Cortés, González Rodríguez, O. J., Méndez-Lango, E.

Centro Nacional de Metrología
km 4,5 Carretera a Los Cués, 76246, Querétaro, México.
llira@cenam.mx

RESUMEN

Uno de los principales problemas al diseñar instrumentos para la medición de propiedades caloríficas es encontrar criterios de diseño que permitan evaluar los límites inferiores de error en la operación de los sistemas de medición. El diseño geométrico de las celdas es uno de los factores que permite encontrar algún criterio de diseño para encontrar los límites de operación o elementos que permitan analizar el comportamiento térmico del sistema, en general se utilizan celdas de forma cilíndrica o esférica. Se aplica la ecuación de conducción de calor en una dimensión para modelar el comportamiento de celdas cilíndricas y esféricas bajo las mismas condiciones a la frontera.

1. INTRODUCCIÓN

El principal elemento de los sistemas de medición de propiedades térmicas, es la celda que, en general, es de forma cilíndrica o esférica. En el diseño de tales sistemas un parámetro útil para determinar su desempeño es el criterio de diseño que permite encontrar el límite de error (valor mínimo) en la operación ideal de la celda.

El campo de temperatura dentro de la celda permite cuantificar el gradiente residual en condiciones ideales y permite proponer modificaciones en el diseño para reducirlo. También permite identificar el valor promedio del campo e identificar la mejor posición de los termómetros para que los valores obtenidos con ellos representen la temperatura o, en su caso, cuantificar las correcciones necesarias al colocarlos en otras posiciones.

Para obtener el campo de temperatura en las celdas de geometría cilíndrica y esférica se aplica la ecuación de conducción de calor en una dimensión como la primera aproximación para modelar su comportamiento.

En este trabajo se presentan los resultados de las celdas cilíndricas que se emplean en el diseño de los sistemas de medición de conductividad térmica de fluidos y de las celdas esféricas que se proponen en algunos sistemas de medición de calor específico.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La ecuación general de conducción es:

$$\nabla^2 T + g(r, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

donde α es la difusividad térmica:

$$\alpha = \rho C_p / \lambda \quad (2)$$

La densidad es ρ , la capacidad calorífica C_p y λ la conductividad térmica.

El término $g(r, t)$ representa la generación de energía (fuente) en el cuerpo, esta puede ser eléctrica, química, nuclear, etc. y T es la temperatura que es función de la posición y el tiempo. Si se considera que no existe generación de calor dentro del sólido, se tiene:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

que es la ecuación diferencial de difusión o de Fourier.

Esta ecuación es el fundamento de todos los métodos de medición de la conductividad térmica, en los métodos permanentes o estado estable el término de la derecha es cero en los métodos transitorios este término determina la evolución temporal del campo de temperatura, en ambos casos es posible encontrar su solución analítica para geometrías y condiciones a la frontera sencillas.

Si se considera que el problema a resolver se puede considerar en el caso ideal, en una dimensión, entonces la ecuación en diferentes sistemas coordenados se reduce a:

Coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

Coordenadas Esféricas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

En todos los casos la solución depende de las condiciones a la frontera del problema físico que se quiera resolver, pero de forma general se pueden escribir las soluciones como:

Coordenadas Cartesianas

$$T(X,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(-\alpha\beta^2 t) X(x, \beta_m) \quad (7)$$

Coordenadas Cilíndricas

$$T(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(-\alpha\beta^2 t) R_0(r, \beta_m) \quad (8)$$

Coordenadas Esféricas

$$T(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(-\alpha\beta^2 t) P_0(r, \beta_m) \quad (9)$$

De igual manera, en todos los casos la solución se expresa en términos de las funciones propias y los valores propios del problema. Las soluciones para los respectivos casos son el conjunto de funciones:

- X: trigonométricas; seno y coseno,
- R₀: de Bessel cilíndricas; J(r) e Y(r) y
- P₀: de Bessel esféricas; j(r) e y(r)

cuya solución particular depende de las condiciones iniciales y a la frontera.

2.1. Solución en Coordenadas Cartesianas

La situación teórica corresponde a una línea sometida a un gradiente de temperatura, con uno de sus extremos a una temperatura conocida. La situación experimental, puede corresponder, por

ejemplo Fig. 1, a la columna emergente (en un baño de temperatura controlada) de un termómetro donde nos interesa conocer la temperatura de la parte expuesta a otra temperatura. Situación que puede aportar información valiosa para la operación de un termómetro de líquido en vidrio o sobre el efecto de la inmersión de un termopar o de un termómetro de resistencia de platino.

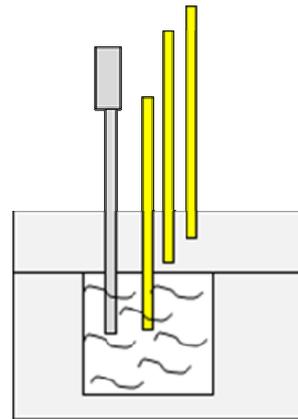


Figura 1. Columna emergente de un termómetro de líquido en vidrio.

Para resolver este problema se supone una línea, Fig. 2, que se encuentra en sus extremos a una temperatura conocida y se quiere conocer el campo de temperatura en todas las posiciones de la línea. Para simplificar el problema y utilizar la simetría del problema lo modelamos como una línea que se extiende de -l a +l. Es decir,

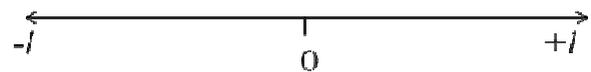


Figura 2. línea sometida a un gradiente de temperatura

Con las siguientes condiciones: Las superficies ± l, están a una temperatura T₀; condición inicial (t=0) de la línea: T=0 y, entonces, la solución está dada por:

$$\frac{T(X,t)}{T_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp(-\alpha\beta^2 t) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (10)$$

Esta solución depende de la posición y el tiempo. Si se define una variable adimensional U/v, se encuentra la solución para distintos tiempos y diferentes posiciones, la cual se muestra en la Fig. 3.

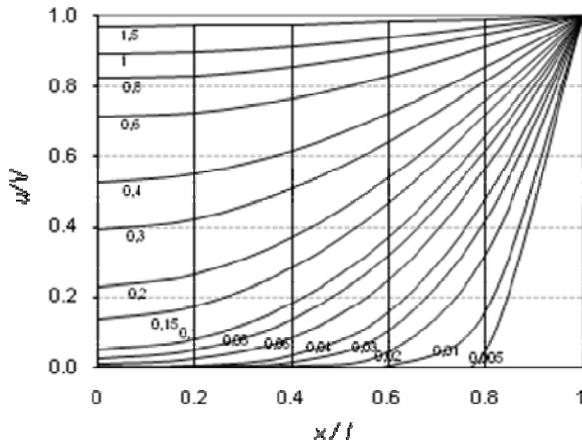


Fig. 3. Campo de temperatura de una línea en función del tiempo y la posición.

En esta solución se considera que inicialmente toda la línea se encuentra a una temperatura cero, al encender el horno o baño el extremo l , se encuentra a una temperatura constante y nos interesa encontrar la evolución de la temperatura a diferentes posiciones, las cuales corresponden al eje horizontal de la gráfica. Los números dentro de la gráfica corresponden a un parámetro que representa el tiempo en el que se observa el campo de temperatura, en la posición $x=l$, la temperatura siempre es la temperatura constante y la posición $x=0$ corresponde al extremo del termómetro, el cual presenta un gradiente, el cual se reduce al evolucionar en el tiempo.

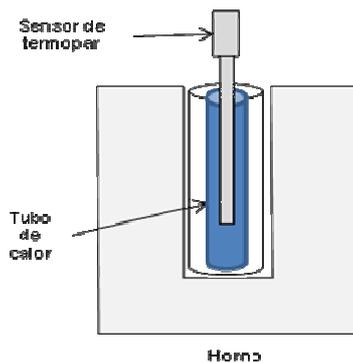


Figura 4. Calibración de termómetros por comparación.

2.2. Solución en Coordenadas Cilíndricas

La situación teórica corresponde una cavidad cilíndrica cuya superficie exterior se encuentra a una temperatura constante. La situación experimental corresponde, por ejemplo Fig. 4, a la cavidad de un horno para la realización de puntos fijos o a la

misma celda o al proceso de calibración de termómetros por comparación, o a una celda de medición de un calorímetro que se use en la medición de conductividad térmica de fluidos o de capacidad calorífica, o de la constante crioscópica, etcétera.

Las condiciones son:

En la frontera la superficie $r=b$ está a una temperatura T_0

Condición inicial ($t=0$) $T_r=0$

La solución es:

$$\frac{T(r,t)}{T_0} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\alpha\beta^2 t}{b}\right) \frac{J_0(\beta_n r/b)}{\beta_n J_1(\beta_n)}, \quad (11)$$

donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel cilíndricas y β_n son los valores propios. El campo de temperaturas es función de la posición y el espacio. Al definir, nuevamente, una variable adimensional U/V , se obtienen las soluciones que se muestran en la Fig. 4 para las distintas posiciones y distintos valores de parámetro que corresponde al tiempo.

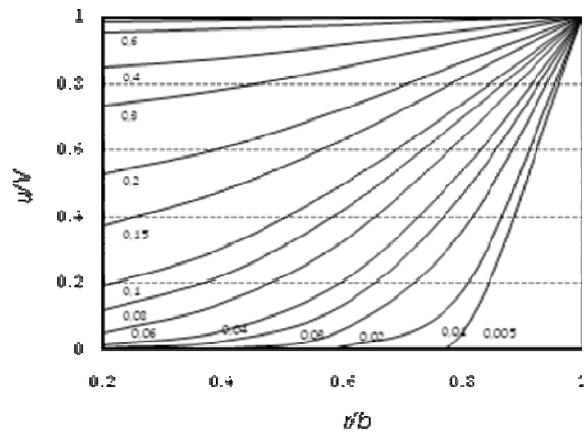


Fig. 4. Campo de temperaturas en función de la posición y el tiempo.

2.3. Solución en Coordenadas Esféricas

La situación teórica corresponde una cavidad esférica cuya superficie exterior se encuentra a una temperatura constante y nos interesa conocer el perfil radial de temperatura. La situación experimental corresponde, por ejemplo, a la cavidad de hornos y celdas para la medición de propiedades termofísicas como capacidad calorífica y conductividad térmica de materiales orgánicos.

Las condiciones son:

A la frontera, la superficie $r=a$ está a una temperatura T_0 .
 Condición inicial ($t=0$) $T_r=0$

La solución es:

$$\frac{T(r,t)}{T_0} = \frac{b}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a-r}{2(αt)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a+r}{2(αt)^{1/2}} \quad (12)$$

donde erfc son las funciones de error complementarias. El campo de temperatura es función de la posición y el espacio. Nuevamente al definir una variable adimensional U/v , en la Fig. 5 se muestran las soluciones para las distintas posiciones y distintos valores del parámetro que corresponde al tiempo.

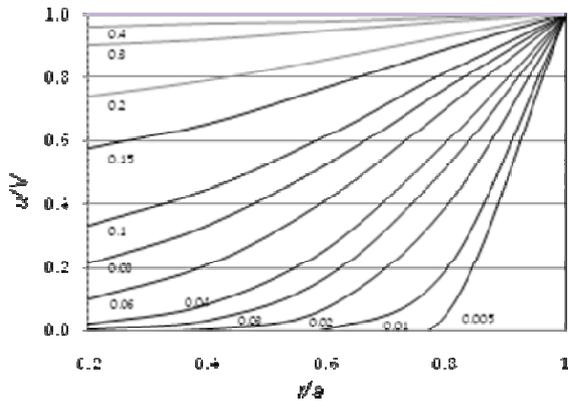


Fig. 5 Campo de temperatura para el interior de una esfera.

El eje vertical corresponde a la temperatura adimensional, el eje horizontal a la posición radial, el cero corresponde al centro de la esfera, los diferentes colores representan el parámetro temporal.

3. CONCLUSIONES

Las gráficas muestran el comportamiento cualitativo que es similar en los tres sistemas, por tanto, los sistemas son equivalentes para ciertos valores de sus parámetros, es decir, el perfil de temperatura de una celda cilíndrica es igual al de una celda esférica.

Obtener los parámetros para que sean equivalentes es difícil pues las soluciones dependen de los valores propios de cada sistema, así como de las

dimensiones que están reducidas con el valor del radio o longitud.

El resultado muestra que el gradiente disminuye conforme transcurre el tiempo y el mayor valor del gradiente se encuentra en el centro de la cavidad.

Al calcular el promedio del campo de temperatura se puede encontrar la posición que corresponde al valor promedio, de tal manera, que si en esa posición se colocará un termómetro, el valor medido por este sería el representativo del sistema, es decir, indica la mejor posición del sensor.

Adicionalmente se observa que si se coloca el termómetro en la superficie de la cavidad el valor que se obtiene tiene el máximo error por gradiente y es indispensable aplicar una corrección si se desea que el valor sea representativo del sistema

REFERENCIAS

[1] N. Ozisik, *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, 1980.
 [2] H. Carslaw, J. Jaeger, *Conduction in solids*, Oxford University Press, 1990.
 [3] A. F. Mills, *Transferencia de calor*, 1995.
 [4] L. Lira, Salazar R, y Garcia A., "Estudio del efecto de borde en el diseño de un aparato para medir la conductividad térmica", *Memorias del XX Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, A.C.*, 310-315, Veracruz, Ver., México, 1995.