

# Herramientas Geométrico Computacionales para Analizar Cualidades de Forma en Rotores Acoplados

José Sánchez V., Sergio Padilla O.

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México  
Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, 04510, Distrito Federal, México.  
jose.sanchez@ccadet.unam.mx

## RESUMEN

A la escasa literatura disponible para diseño de engranes de ejes ortogonales excéntricos, se añaden las condiciones de propiedad de diseños y de sus procesos de fabricación y de verificación. En un intento por develar diseños válidos y establecer ajustes o semejanzas con engranajes reales para evaluarlos, se han desarrollado procesadores que materializan las superficies límite de dientes en espacios CAD. El conocimiento exacto de estas formas y sus ensambles, permite diseñar protocolos de verificación incluido el análisis de interferencia. Las herramientas son útiles en el análisis de otros pares acoplados diferentes de engranes.

## 1. INTRODUCCIÓN

La teoría de diseño de engranes se enfoca principalmente sobre engranes rectos o helicoidales y con perfiles envolventes y epicicloidales. Buckingham [1], ataca en profundidad aspectos de diseño de engranes hipoidales; sin embargo no desarrolla una teoría general del desarrollo de dientes y su curvatura en direcciones longitudinal y transversal, o es escasa y parcial. Otros autores [2] los tratan bajo los aspectos de eficiencia de transmisión, lubricación, corte, materiales, terminado o pruebas.

La evaluación metroológica de estos engranes para propósitos de análisis de falla, no requiere del conocimiento exacto del diseño o proceso de fabricación; pero sí del cumplimiento de relaciones cinemáticas a todo lo largo y alto del desarrollo de dientes. Para éste propósito, se han creado procesadores de geometrías y modeladores de superficies, que las lanzan a CAD en distintos estados de rotación.

Definiremos como "geometrías válidas" a aquellas configuraciones de superficies límite, pertenecientes a rotores acoplados ortogonalmente, que permiten deslizamiento sin interferencia, y garantizan una región de contacto continua para cualquier estado de rotación. El conocimiento de geometrías válidas y sus ensambles en espacios CAD, permite diseñar protocolos de verificación aplicables también a otros pares diferentes de engranajes. Como subproducto de esta investigación se han encontrado diseños no comunes que exceden el espectro observado en la industria.

## 2. CINEMÁTICA DE PARES HIPOIDALES

La teoría general de engranes casa ángulos de generatriz, diámetros y número de dientes por:

$$\frac{Dbp}{Dbg} = \left( \frac{Np}{Ng} \right)^2, \quad (1)$$

$$\tan(\gamma_p) = \frac{Np}{Ng}, \quad (2)$$

donde  $Dbp$  es el diámetro base o más estrecho del hiperboloide del piñón,  $Dbg$  es el diámetro más estrecho del hiperboloide de la corona,  $Np$  y  $Ng$  son los números de dientes de piñón y corona respectivamente, y  $\gamma_p$  el ángulo de la generatriz de hiperboloides respecto del eje del piñón. Esta inclinación de la generatriz, garantiza tangencia de hiperboloides a todo lo largo, cuando el eje conjugado es ortogonal.

El desarrollo de los hiperboloides de revolución, que representan las superficies de paso de los engranes, cumple la relación:

$$r = \sqrt{Rb^2 + h^2 \tan^2(\gamma)}, \quad (3)$$

donde  $r$  es el radio del hiperboloide a una altura  $h$  del círculo base:  $Rb$ . Ésta relación puede adquirir diferentes aspectos, según se trate de ecuaciones cilíndricas o paramétricas, o escritas en diferentes sistemas de coordenadas.

Una ecuación o conjunto de ecuaciones que represente el desarrollo del diente a lo largo del hiperboloide es más complejo; pero una línea de inclinación  $\gamma_p$  es común a ambos hiperboloides y puede constituir un trazo válido de dientes para ambos: corona y piñón.

Sin embargo, el diseño de dientes admite variaciones de acuerdo a lo observado en piezas comunes; pero además, el análisis de ensambles permite deducir que deben cumplirse las relaciones:

- El paso o distancia entre dientes piñón-corona, proyectada sobre la generatriz, es el mismo a alturas conjugadas.
- El desarrollo de dientes es perpendicular a alturas conjugadas, o tangente en ensambles.

Estas condiciones sin embargo, parecen no conducir de manera directa a un diseño, ni en su desarrollo longitudinal ni en su perfil transversal o de profundidad.

### 2.1. Cinemática Fuera de las Superficies de Paso

La Ec. (1) parece no obligada en dientes con profundidad, ya que mientras la relación de dientes se conserva, no sucede lo mismo con los diámetros. Similarmente los engranes helicoidales no están ligados a la Ec. (1), permitiendo cualquier relación que satisfaga la Ec. (4):

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{N_g D_p}{N_p D_g}\right). \quad (4)$$

Por otra parte dos secciones de engrane hipoidal de espesor despreciable a la altura de los círculos base, coinciden con engranes helicoidales.

Reescribiendo la Ec. (3) en coordenadas ortogonales se obtiene:

$$x^2 + y^2 = Rb^2 + z^2 \tan^2(\gamma). \quad (5)$$

Con las Ecs. (4) y (5) se pueden iniciar sendos trazos de corona y piñón, válidos en las vecindades de  $Rb$ .

A partir de las coordenadas iniciales de estos trazos, se puede navegar por las superficies hipoides, Ec. (5), hasta que se cumplan las condiciones (a) y (b) de la sección 2. El proceso se continúa hasta que se llega a las regiones de interés, o hasta que no se encuentran nuevos

segmentos que satisfagan condiciones de acoplamiento. Este proceso constituye el principio de trazo longitudinal.

### 2.2. Desarrollo Transversal de Dientes

Considerando que la involueta en dientes de engranes hipoidales tienen perfil envolvente en el círculo base, los desarrollos longitudinales que parten de puntos envolvente del perfil base definirán el desarrollo transversal de dientes a todo lo largo de su desarrollo. Sin embargo, no se descartan otros perfiles. Los ajustes siguientes son una opción para estos trazos:

Para los desarrollos de cresta en corona:

$$Dg + Add \text{ en vez de: } Dg, \quad (6.1)$$

$$Dp - Add \text{ en vez de: } Dp, \quad (6.2)$$

donde  $Add$  y  $Ded$  son las alturas de adendo y dedendo. Los ajustes para trazo de dedendo serán similares.

### 2.3. Modelación de Superficies Límite

El lugar geométrico de las trayectorias: principal, en adendo y dedendo, y de ser necesario de otras curvas intermedias, permite configurar y resolver un modelo paramétrico de superficie B-spline:

$$p(u, v) = UMcV, \quad (7)$$

Donde  $p(u, v)$  es el conjunto de puntos superficie 3D definido parametricamente por  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ,  $Mc$  Es una matriz de puntos de control que forman una malla, la que moldeará la superficie a través de coeficientes de influencia anidadas en  $U$  y en  $V$ , y  $U$  y  $V$ , son matrices de coeficientes de influencia de los puntos de control, que adoptan diferentes valores dependiendo de los valores de  $u$ ,  $v$ , y del sub-modelo elegido.

Los valores internos de  $U$ ,  $Mc$ ,  $V$ , dependen del sub-modelo B-spline (B-s) elegido; entre las variantes posibles pueden ser: B-s con grados diferentes en direcciones  $u$  y en  $v$ , y con distribución periódica y no periódica. Un caso particular de B-s lo constituyen las superficies de Bezier; todas ellas hábiles para modelar la superficies de interés. Remitimos al lector a la referencia [3] para ahondar detalles.

Adoptando un modelo no periódico a una cara del piñón, éste posee los parámetros de la Fig. 1.

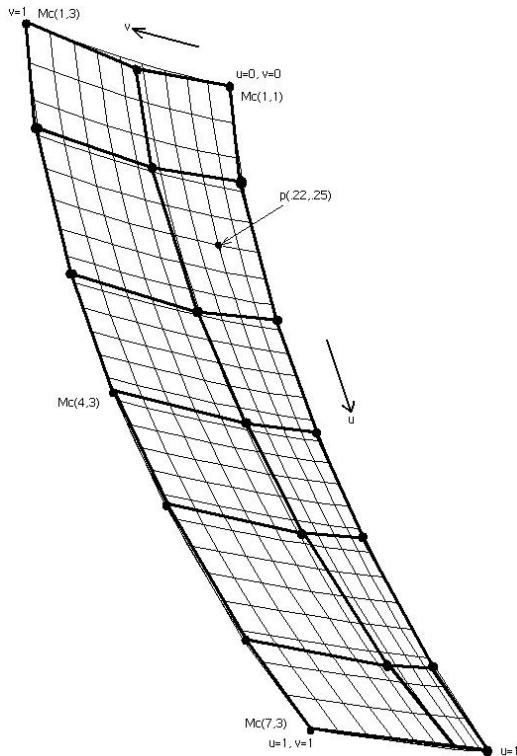


Fig. 1. Los puntos de trayectorias permiten definir el poliedro Mc(1,1) Mc(3,7), el que moldeará la superficie de dientes  $p(u,v)$ .

### 3. ANÁLISIS DE FORMA Y HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES

#### 3.1. Modelado de Superficies

La Ec. (7) es continua y derivable en  $u$  y en  $v$ :  $p^u(u,v), p^v(u,v)$ ; lo que permite obtener un vector unitario  $e$  normal a la superficie, Fig. 2, y dado por:

$$e(u,v) = p^u(u,v) \times p^v(u,v), \quad (8)$$

El conjunto de puntos  $p(u,v)$  y vectores  $e(u,v)$ , permite definir un conjunto de puntos de medición ( $cm$ ) de localización:

$$cm(u,v) = p(u,v) + e(u,v)r, \quad (9)$$

donde  $r$  es el radio del palpador, Fig. 3.

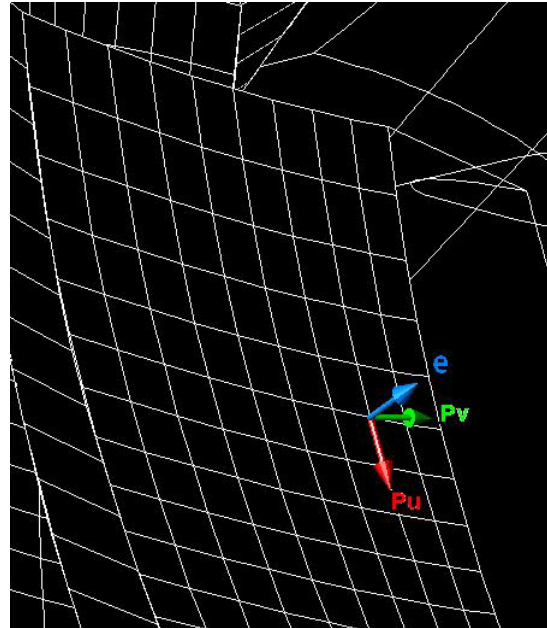


Fig. 2. Obtención de direcciones normales de palpación “e”.

En una geometría no perfecta los puntos realmente palpados serían  $cm'$ . El conjunto de puntos  $cm'$  constituirá una capa envolvente, y el cumplimiento de tolerancias se puede realizar por los valores que adopte la desviación de la Ec. (10):

$$devr(u,v) = |cm'(u,v) - cm(u,v)|. \quad (10)$$

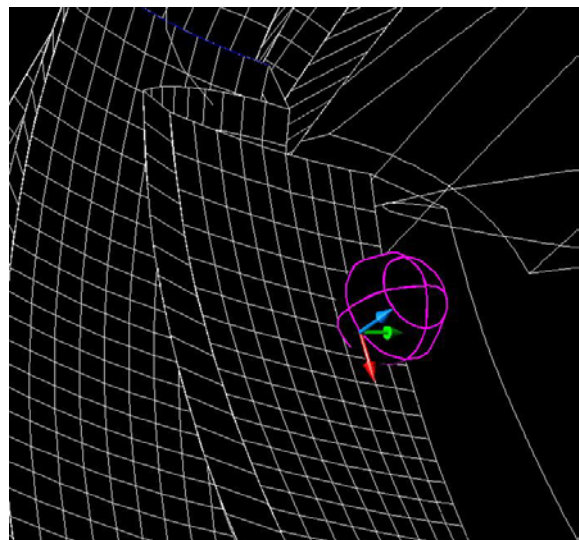


Fig. 3. El conocimiento numérico de puntos superficie, puntos capa envolvente y radio o dirección de palpación permite definir protocolos de medición.

### 3.2. Recursos Computacionales

El análisis de forma e interacciones entre objetos geométricos, difícilmente puede realizarse sin la confirmación visual que es posible realizar en espacios CAD. Para ello, se tomaron o adaptaron los códigos fuente de Numerical Recipes [4]; principalmente en lo referente a manipulaciones lineales.

Básicos:

Entradas:  $N_g$ ,  $N_p$ , paso (@ circ base), Aspecto  $H_g/D_g$ .

Salidas:  $D_g$ ,  $D_p$  (@circ base),  $H_g$ ,  $H_p$ ,  $\gamma_g$ ,  $\gamma_p$ ,  $\alpha_g$ ,  $\alpha_p$ , (ángulos de salida de dientes @circ base),  $L_g$  (Longitud de generatriz),  $Addc$ ,  $Dedc$ ,  $Addp$ ,  $Dedp$  (@circ base)

Trazo:

Entradas:  $D_g$ ,  $D_p$  (@circ base),  $H_g$ ,  $H_p$ ,  $\gamma_g$ ,  $\gamma_p$ ,  $\alpha_g$ ,  $\alpha_p$ , (ángulos de salida de dientes @circ base),  $L_g$  (Longitud de generatriz),  $Add$ ,  $Ded$  ó puntos intermedios de arranque.

Salidas: Bases de datos de: ejes, círculos base, adendo, dedendo, curvas de desarrollo, generatriz. Envolvente normalizada. Superficies de perfiles.

Ensamble:

Entradas: Salidas de Trazo, número de flancos, crestas y raíces a graficar

Salidas: Arreglos de trazos transformados, código CAD.

La interactividad de recursos de procesamiento, se lleva a cabo por el establecimiento de matrices numéricas o con texto embebido, de intercambio de datos en código ASCII. Los modeladores de sólidos de Autodesk, permiten el intercambio de información a través de archivos en este formato.

## 4. RESULTADOS

El empleo del proceso ha permitido encontrar un espectro de diseños válidos, que excede lo observado en piezas industriales comunes, como lo muestran las Figs. 4 y 5.

En estos diseños, los trazos se extienden desde en círculo base hasta más allá de la relación  $D/H=1.0$ ; ésta posibilidad permite elegir altas inclinaciones diente/ecuador, para lograr reversibilidad de movimiento, entre otros beneficios.

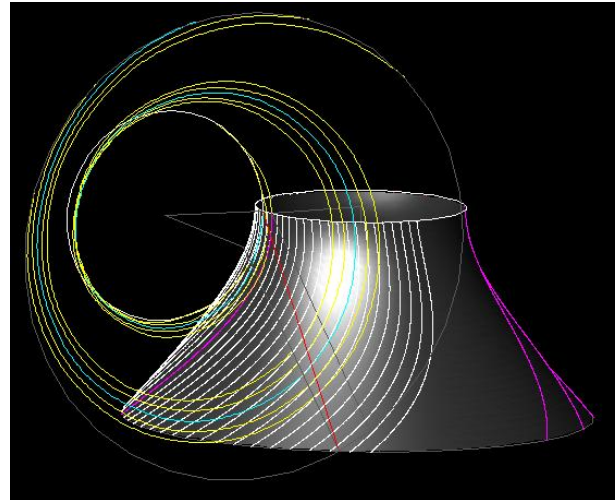


Fig. 4. Par acoplado de relación  $N_g/N_p=6$ ,  $D_g/D_p=1$ .

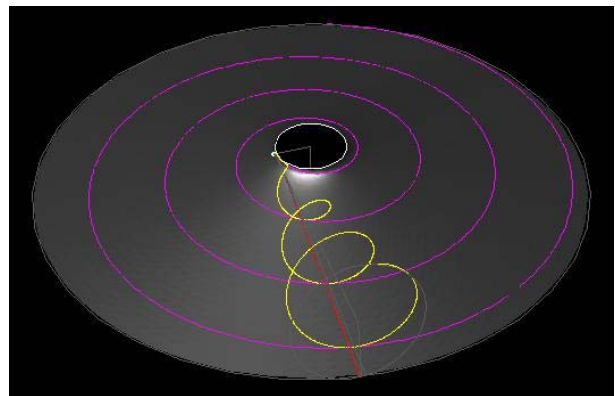


Fig. 5. Par acoplado de relación  $N_g/N_p=1$ ,  $D_g/D_p=15$ .

Como las figuras previas lo muestran, se cuenta ahora con herramientas numéricas de transformación, aproximación, y trazo CAD, que permiten: (a) definir palpaciones 3D en piezas de diseño conocido y determinar desviaciones, (b) capturar formas reales de diseño desconocido por MMCs de forma independiente para corona y piñón, ensamblarlas en CAD y analizar interferencia, (c) convertir piezas reales en piezas maestras, por la adición de vectores en diseños aproximados, Fig. 6.

### 4.1. Casos Particulares de Acoplamiento

Existen casos similares de aplicación industrial, que se enfrentan a problemas de verificación de forma y definición de criterios de tolerancias; algunos de ellos son: engranes de ejes cruzados no hipoidales, y compresores rotativos continuos para gases. Para estos casos, las herramientas desarrolladas permiten establecer ajustes y convertir los diseños

hipoides en planoides o cónicos; o los perfiles envolventes trancos, en perfiles suaves, permitiendo desarrollar protocolos para tales aplicaciones, Figs. 7 y 8.

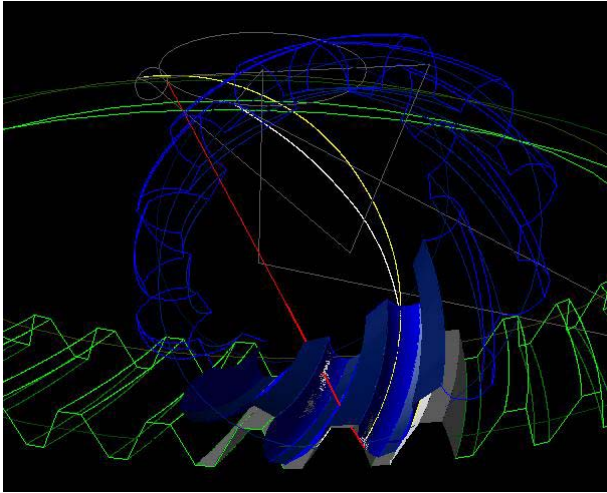


Fig. 6. Ensamble del piñón de Figs. 1 a 3 en azul y corona en blanco, mostrando: tangencia de líneas de paso (blanca y amarilla), y proximidad de superficies en línea de acción (en rojo).

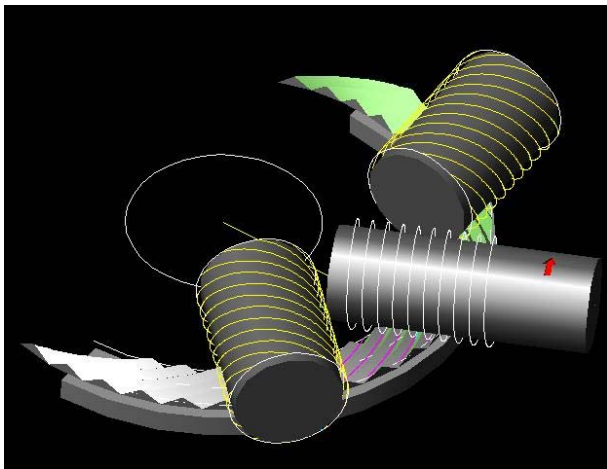


Fig. 7. Tornillos acoplados a trayectorias planoides.

## 5. DISCUSIÓN

El paquete de herramientas desarrollado, aporta los siguientes beneficios:

Permite la aproximación a diseños desconocidos por procedimientos heurísticos (ingeniería de reversa).

Permite la verificación y análisis de falla cuando ocurre por interferencia.

Permite diseñar protocolos de verificación 3D en MMC.

Permite la comunicación y enseñanza de la cinemática de pares acoplados ortogonalmente.

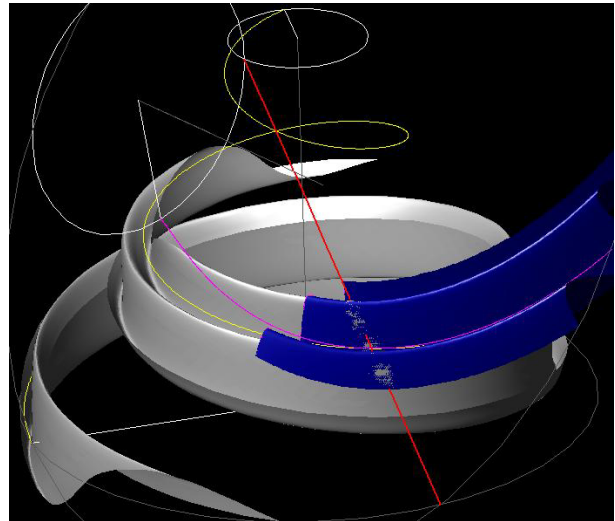


Fig. 8. Análisis de interferencia entre tornillos de perfiles continuos senoidales.

## 6. CONCLUSIONES

Los principios y metodología de trazos válidos no constituyen por si mismos un protocolo de medición; pero constituyen una herramienta de tipo general para desarrollar protocolos de verificación a piezas particulares, y de análisis de falla por interferencia.

Este trabajo sirve de base para confeccionar una propuesta a: "GPS - Comité ISO 213", relativa a la verificación de calidad de forma de engranes, basada en el conocimiento exacto de formas; en sustitución de pruebas propietarias.

## REFERENCIAS

- [1] Analytical Mechanics of Gears, Buckingham E., Dover Publications Inc., N. Y. 1963, Library Congress Catalog Number: 63-21681.
- [2] Gear Handbook, Dudley D., Mc. Graw Hill Company, First Edition, N. Y., 1962, Library Congress Catalog Number: 61-7304
- [3] Geometric Modelling, Michael E. Mortenson, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-88279-8, Ch 2.