PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES, UN ENFOQUE EVOLUTIVO

José Luis Castro Quilantán(*§), Christian Bouchot (**) y Jesus Carlos Sánchez Ochoa (**)
ESFM Edif 9 PB UPALM Zacatenco Lindavista CP07738, México D.F.
** ESIQIE Edif 7 PB UPALM Zacatenco Lindavista CP07738, México D.F.
§ (525) 57296000 ext. 55017 ; quilantan52@yahoo.com.mx

Resumen: Se presenta un enfoque evolutivo para enseñar la estimación de incertidumbres mostrando el desarrollo de los conceptos asociados al objetivo fundamental de la medición indirecta: Estimar la incertidumbre correspondiente para una cantidad que depende de varias mediciones. El enfoque propuesto se presenta como una experiencia de aprendizaje que permite identificar y superar las limitaciones de la GUM en un contexto práctico así como apreciar mejor la contribución del método de Monte Carlo en el problema de la propagación de incertidumbres.

1. INTRODUCCIÓN

Con el desarrollo de la *Guía* [1] y su creciente influencia en la forma de calcular y expresar las incertidumbres en las mediciones, se presenta el problema de revisar la manera en que se enseñan estos temas a los futuros técnicos, científicos e ingenieros. Tal revisión debe considerar los métodos de medición y la estimación de incertidumbres a la luz de los principios modernos en la enseñanza de las ciencias, partiendo de contextos accesibles al estudiante, proponiendo actividades de aprendizaje y conversando largamente sobre el significado y la trascendencia de lo aprendido

Cómo introducir los rasgos esenciales de estos temas en las carreras técnicas será un punto a debatir durante mucho tiempo. Sin embargo, aunque la *Guía* es de una lectura densa, ignorarla completamente en el aula no es una opción. La industria nacional, los acuerdos internacionales del comercio y el aseguramiento de la calidad en la producción, se orientan hacia una plena implementación de la misma. La demanda de recursos humanos calificados, con conocimientos básicos de metrología es ya una realidad que las instituciones de educación media y superior deben atender.

Por tanto, es una necesidad importante proponer experiencias de aprendizaje para enseñar a las nuevas generaciones los conceptos centrales de la metrología, experiencias apropiadas para apoyar al profesorado dispuesto a reconsiderar el papel de las mediciones en las prácticas del laboratorio de física. El enfoque evolutivo que aquí se propone tiene como objetivo comparar, en un caso representativo, la evolución de conceptos asociados a la estimación de incertidumbres. La principal aportación de este enfoque es una visión del desarrollo de conceptos que permite comprender los alcances y limitaciones de las diferentes respuestas que históricamente se han dado al problema de las incertidumbres: El método diferencial, la ley de propagación de incertidumbres [1,3] y la simulación de Monte Carlo [2].

2. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Para presentar el enfoque evolutivo en la propagación de incertidumbres se utilizará la descripción de la experiencia de aprendizaje con un grupo de alumnos iniciado en el tratamiento de las mediciones: Se partió de una pregunta generadora enunciada en diferentes niveles cognitivos en función del interés y las necesidades del grupo:

En la primera de una serie de sesiones dedicadas al tema *Introducción a las mediciones,* en un curso inicial de Laboratorio de Física, se inició la discusión con una pregunta abierta:

¿Cómo se puede estimar la densidad de un metal? La pregunta abierta, deseable en las primeras etapas de formación, permite a los estudiantes experimentar la responsabilidad de proponer un plan que ha de incluir desde la descripción del procedimiento para tomar datos hasta los criterios para evaluar la bondad de la respuesta. A partir del plan propuesto por el grupo se enuncia una pregunta centrada en el tema que ocupó la atención del grupo a lo largo de las siguientes sesiones:

¿Cómo estimar la densidad del aluminio, conociendo el siguiente resumen de las dimensiones características para una colección de muestras de dicho metal ? Para un cilindro recto representativo de dicho metal se reporta un diámetro medio de 2 cm con una incertidumbre de 0.02 cm, altura media de 11 cm con

incertidumbre de 0.11 y una masa de valor medio 93.4 g con incertidumbre de 0.0934 [4,5]

La pregunta centrada supone experiencia previa y un conocimiento de los conceptos pertinentes y los procedimientos asociados. Por ejemplo conocer qué significan valores medios, incertidumbre, error relativo y cómo se calcula cada uno.

En la perspectiva del presente trabajo la pregunta centrada en el tema permite seguir la evolución de la estimación de incertidumbres. Así, para el cálculo de la densidad del aluminio es necesaria una estimación del volumen del cilindro correspondiente. Es el objetivo de este trabajo presentar un desarrollo en detalle de cómo se puede comprender mejor la propagación de incertidumbres considerando la evolución de los conceptos pertinentes. Ilustraremos la evolución de dichos conceptos con el caso particular del volumen de la muestra de aluminio.

En este contexto se justifica desglosar la pregunta centrada en el tema, en otras preguntas clave y las actividades necesarias para elaborar una respuesta razonable:

¿Cómo interpretar la diferencial de volumen para la función $V(x,y) = \pi x^2 y / 4$, la cual representa el volumen de un cilindro de diámetro x con altura y ?

¿Cómo es el desarrollo de Taylor para la función $V(x,y) = \pi x^2 y / 4$, en la vecindad de punto (d, h) que representa los valores medios del diámetro y la altura?

Cada una de las preguntas anteriores se respondieron mediante actividades que incluyeron la discusión y comprensión de la pregunta, el trabajo individual, la discusión colectiva y el resumen de los aprendizajes logrados en las sesiones de trabajo.

3 MÉTODO DIFERENCIAL

Considerando la representación simbólica para el volumen del cilindro, y después de una discusión sobre la serie de Taylor el grupo escribió la siguiente representación del desarrollo de Taylor a primer orden para la función *V(x,y),* en la vecindad del punto (d,h)

$$\pi x^2 y/4 = (\pi d^2 h / 4) + (\pi d h)(x - d)/2 + (\pi d^2/4)(y - h)$$

Esta representación simbólica del desarrollo de Taylor se interpretó geométricamente de como se describe con detalle en la Tabla 1

Tabla 1 *Interpretación geométrica del desarrollo de Taylor*

Expresión simbólica	Descripción geométrica
$\Delta V = \pi x^2 y / 4 - \pi d^2 h / 4$	Diferencia de volúmenes entre el cilindro de diámetro *x*, altura *y* y el cilindro de valores medios, diámetro *d*, altura *h*
$\pi d^2 h / 4$	Cilindro de diámetro *d*, altura *h (valores medios)*
$(\pi d h)(x - d)/2$	Cascarón cilíndrico de diámetro *d,* altura *h*, espesor *(x-d)/2*
$(\pi d^2/4)(y - h)$	Disco de diámetro d, espesor (y-h)

En resumen, al término de dos sesiones de laboratorio, con tres horas de duración cada una, entre discusión y actividades, el grupo identificó dos aprendizajes importantes que permiten una interpretación geométrica del desarrollo de Taylor para el volumen del cilindro y un método para estimar la incertidumbre en dicho volumen. Dichos aprendizajes cierran la presente sección.

I) Interpretación geométrica

La diferencia de volúmenes de dos cilindros rectos de dimensiones (x,y) y (d,h), (primera columna, renglones 1 y 2), es igual, en la aproximación a primer orden, a la suma de los volúmenes de un cascarón cilíndrico de diámetro d, altura h y espesor (x – d)/2,
más el volumen de un disco delgado de diámetro d y espesor (y – h).

II) Método diferencial

El método diferencial para la estimación de incertidumbres corresponde a aproximar la incertidumbre ΔV *en el volumen* $V(x,y) = \pi x^2 y/4$ *como la suma de los dos primeros términos de la serie de Taylor, expresando las incertidumbres en el diámetro y la altura , como* $\Delta x = (x - d)$ *y* $\Delta y = (y - h)$ *respectivamente.*

$$\Delta V = (\pi d h/2)\, \Delta x + (\pi d^2/4)\Delta y$$

4 PROBABILIDAD Y MEDICIONES

En 1993 la International Standards Organization (ISO) recomendó la interpretación probabilista como la mejor alternativa para el tratamiento profesional de las mediciones[referencia]. Esta recomendación de la ISO ha sido adoptada por la mayorìa de las organizaciones relacionadas con la elaboración de estándares internacionales. Asì, los acuerdos de organizaciones como la IUAPAP(International Union of Pure and Applied Physiscs), la IUPAC(International Union of Pure and Applied Chemistry), y el BIMP(Buró International des Measures et Ponds), afectan el cómo se reportan las mediciones y sus incertidumbres en todo trabajo científico.

El punto central de la interpretación probabilista es que las mediciones se interpretan no como números sino como variables aleatorias o muestras de una distribución de probabilidad. Por ejemplo, si se afirma que un cilindro de aluminio tiene un diámetro de 2 cm con una incertidumbre de 0.02 cm en la medida, esto puede interpretarse como sigue: el diámetro del cilindro es una variable aleatoria *x* con una distribución de probabilidad (por ejemplo gaussiana) de valor medio 2 cm y desviación standard de 0.02 cm . De manera análoga se puede hacer una afirmación semejante para la altura y la masa del cilindro representativo

En el marco de la interpretación probabilista de las mediciones, las preguntas importantes, consensuadas por el grupo para orientar las actividades, fueron:

¿Cómo estimar el valor medio y la incertidumbre en el volumen del cilindro considerando las medidas proporcionadas?

¿En la aproximación a primer orden en la serie de Taylor, cuál es el valor más probable del mesurando y cuál es la incertidumbre asociada?

Considerando la interpretación probabilista de las mediciones, el grupo reinterpretó el desarrollo de Taylor a primer orden para la variable *V(x,y)* como la expresión siguiente, pero considerando a *x, y* variables aleatorias de valores medios *d, h* .

$$\pi x^2 y/4 = \pi d^2 h/4 + (\pi d h)(x - d)/2 + (\pi d^2/4)(y - h)$$

En este contexto se analizan los resultados de dos operaciones de interés: el cálculo del promedio y la varianza de la variable V. El resumen del análisis se muestra en la Tabla 2. Aunque la varianza es fundamental , sus dimensiones no corresponden a la variable aleatoria y esto da lugar a dificultades para identificar incertidumbre y varianza. Más bien se toma la incertidumbre como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Este parámetro se denomina desviación standard y esta identificación supone una distribución gaussiana para el mesurando de interés. Puede mostrarse que esta aproximación es válida para incertidumbres pequeñas en las variables de entrada

Tabla 2 *Principales afirmaciones de la interpretación probabilista*

Afirmación	Argumento	Observaciones
	Promedios	Resultado exacto en la aproximación a

Prom(V) = $\pi d^2 h / 4$	*Prom(x-d)=Prom(y-h)=0*	primer orden del desarrollo de Taylor
$Var(V)= (\pi d h/2)^2 u(d)^2 + (\pi d^2 / 4)^2 u(h)^2$ $u(V)^2 = Var(V)$	*Incertidumbres* $u(d)^2 = * Prom(x-d)^2$ $u(h)^2 = Prom(y-h)^2$	u(d) , u(h) son las incertidumbres en el diámetro y la altura. u(V) es la incertidumbre en el volumen V No se incluyen términos de covarianza

Como aprendizaje relevante asociado a la interpretación probabilista de las mediciones, el contenido de la Tabla II permite construir una expresión importante que se identifica en la *Guía* como la “ley de propagacion de incertidumbres” .

III) Incertidumbres según la *Guía*
El principal resultado de aprendizaje al asumir la interpretación probabilista de las mediciones es la siguiente expresión:

$$u(V)^2 = (\pi d h/2)^2 u(d)^2 + (\pi d^2 / 4)^2 u(h)^2$$

conocida como la ley de propagación de incertidumbres y promovida por la Guía como la fórmula para la propagación de errores. Basta agregar un término de la forma

$$2(\pi d h/2) (\pi d^2 / 4) Cov((x-d)(y-h))$$

para incluir el caso de variables correlacionadas (cfr, 9.9 capitulo 9 , Taylor [3])

5 MÉTODO DE MONTE CARLO

En junio de 1987, William Titus publicó en la revista *American Journal of Physics* una alternativa numérica para la propagación de incertidumbres [2]. Sin mencionar el método de Monte Carlo, el autor identifica el problema:
Estimar el mejor valor y la incertidumbre para una función Q (x,y,z..) que depende de N variables experimentales x,y,z,…, dadas las mejores estimaciones para los valores, incertidumbres y correlaciones de las variables en cuestión,

Y propone una técnica numérica para resolverlo:
se elige una distribución de probabilidad que aproxime la distribución actual de valores experimentales, se muestrea la distribución un número finito de veces, calculando cada vez la función Q (x,y,z..). De acuerdo con la teoría del muestreo, el mejor valor de Q y la incertidumbre asociada corresponden al promedio y la desviación standard del arreglo de Q antes obtenido.

Después de analizar largamente las afirmaciones anteriores el grupo resume los siguientes aprendizajes

IV) El problema a resolver
Estimar la mejor aproximación y la incertidumbre para la función $V(x,y) = \pi x^2 y / 4$, *considerando que tanto* ***x*** *como* ***y*** *son variables aleatorias independientes con una distribución dada de valores medios e incertidumbres conocidas*

V) La solución según Titus
*En código MATLAB / SCILAB, simulación de Monte Carlo para la función V= pi*X^2*Y/4* [2,6]

```
N=input('N: ')

x=2+0.02*randn(1,N);   y=11+0.11*randn(1,N);

V=pi*x.*x.*y/4; Vol = mean(V) ; IncertV =std(V);
```

Resultados para N= 10,000

Volumen = 34.5607 cm^3

IncertidumbreV = 0.7725 cm^3

Tabla 3 *Estimación de incertidumbres con diferentes métodos*

Método	Principales conceptos	Representación asociada	Incertidumbre
	Diferencial de una función,		

Diferencial	error relativo, incertidumbre	$\Delta V = (\pi\, d\, h/2)\, \Delta x + (\pi\, d^{2} / 4)\, \Delta y$	$\Delta V = 1.0367\ cm^3$
Guía	Probabilidad, promedio, varianza, desviación standard	$u(V)^{2} = (\pi\, d\, h)^{2}\, u(d)^{2} + (\pi\, d^{2} / 4)^{2} u(h)^{2}$	$u(V) = 0.7727\ cm^3$
Monte Carlo	Variable aleatoria , función de distribución, generación de números aleatorios, simulación	*IncertidumbreV=desv.standard(V)* *V(x,y) función de variables aleatorias*	*delV=0.7725* cm^3

6. DISCUSIÒN DE RESULTADOS

En la Tabla 3 se presenta el resumen de los resultados para la estimación de incertidumbres con los diferentes métodos para la función *V(x,y)* Los renglones y las columnas de la Tabla 3 se pueden leer como un diagrama que muestra la evolución de los conceptos asociados a la estimación de incertidumbres En cada renglón de la Tabla 3 se describen los diferentes métodos para la estimación de incertidumbres. Y para cada método se describen los principales conceptos, la representación de la incertidumbre y el resultado particular para la función *V(x,y).* En contraste, cada columna permite observar la evolución de los conceptos así como la evolución de las representaciones asociadas a la estimación de incertidumbres.

Como resumen de los aprendizajes logrados el grupo suscribió la siguiente afirmación que cierra el presente trabajo:

VI) Método de Monte Carlo y propagación de incertidumbres
La expresión z = V(x,y).representa simbólicamente la relación entre el mesurando z y las variables aleatorias experimentales x,y. La ley de propagación de incertidumbres según la Guía, es un procedimiento determinista para estimar la incertidumbre del mesurando a partir de las incertidumbres de las variables de entrada. En los casos en que la función modelo del mesurando es altamente no lineal la aplicación de este procedimiento presenta dificultades. En contraste el método de Monte Carlo presenta un procedimiento probabilista que permite obtener la distribución del mesurando z para cualquier función V(x,y) de variables aleatorias. El procedimiento genera posibles resultados del mesurando z a partir de posibles valores de las variables x,y. Los resultados dan lugar a la distribución de z de la cual se obtienen los primeros momentos, en particular, el valor medio y la varianza; siempre en el límite de pequeñas incertidumbres en las variables de entrada. .

REFERENCIAS

[1] GUM, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*-ISO 1995 [ISBN 92-97-10188-9]

[2] William J Titus, *Am. J Phys*. 55 (6), June 1987 El método propuesto por el autor no requiere del desarrollo de Taylor y por tanto no hereda las limitaciones de la aproximación lineal

[3] J.R. Taylor, *An introduction to error analysis*, (2nd ed), University Science Books, 1997 [ISBN 0-935702-42-3]

[4] B. Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático, Capítulo 10, 9ª edición, Editorial MIR, 1977*

[5] R. Courant y, F. John*, Introducción al Cálculo y al análisis matemático*, vol.1, Limusa,1999

[6] J.L.C.Quilantán, J.C.Sánchez Ochoa, *'Metrología en el aula y hojas de cálculo ponencia presentada en la 14 Reunión Nacional de Física y Matemáticas, ESFM-IPN, 2009*